Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Sommersemester 2020

Darstellungen endlicher Gruppen – Blatt 1

Abgabe der Lösungen bis zum 27.04.2020, 23:59 Uhr per E-Mail-Zusendung (s.u.)

Bitte verfassen Sie Ihre Lösungen mit Hilfe der auf der Internetseite bereitgestellten LaTeX-Template-Datei und produzieren Sie Ihre Abgabe im PDF-Format. Senden Sie diese dann per E-Mail an

`sek-az@math.uni-duesseldorf.de` (Betreff: `Uebungsblatt 1, Vorlesung Klopsch`)

und, jetzt beim ersten Blatt, zur Sicherheit als Kopie auch an `klopsch@hhu.de`. Verwenden Sie zum Versenden bitte Ihre offizielle hhu-Email-Adresse, damit ich diese sammeln kann. Alle weiteren Informationen und Materialien finden Sie bekanntlich auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/DarstEndlGruppen_SS20/`.

Aufgabe 1.1 (4 Punkte)

Sei G eine Gruppe, und K ein Körper. Seien (π, V_π) und (ϱ, V_ϱ) endlich-dimensionale Darstellungen von G über K, und weiter sei $n = \dim(\pi) = \dim(\varrho)$.
Erläutern Sie: Es gilt $\pi \cong \rho$ genau dann, wenn sich bzgl. geeigneter Basen in beiden Fällen ein und dieselbe Darstellung in Matrizenform $G \to \mathrm{GL}_n(K)$ ergibt.

Aufgabe 1.2 (4 Punkte)

Sei $G \le \mathrm{Sym}(6)$ eine Diedergruppe der Ordnung 12. Sei $\varrho\colon G \to \mathrm{GL}_6(K)$ die zugehörige Darstellung (mittels Permutationsmatrizen) auf dem Standardzeilenvektorraum K^6.
Geben Sie in einer Tabelle explizit alle Elemente $g \in G$ (in Zykelschreibweise) und ihre Bilder $g\varrho \in \mathrm{GL}_n(K)$ an.

Aufgabe 1.3 (4 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe, und K ein Körper. Zeigen Sie: Eine Darstellung (ϱ, V) von G ist genau dann die reguläre Darstellung, wenn es ein $v \in V$ gibt dergestalt, daß die Familie $(v.(g\varrho))_{g\in G}$ eine Basis für den K-Vektorraum V bildet.

Aufgabe 1.4 (4 Punkte)

Sei $G = \langle x \rangle \cong C_5$ eine zyklische Gruppe der Ordnung 5. Betrachten Sie die reguläre Darstellung $\varrho\colon G \to \mathrm{GL}_5(K)$ über $K = \mathbb{R}$ bzw. $K = \mathbb{C}$, die durch

$$e_1^x = e_1.(x\varrho) = e_2, \quad e_2^x = e_2.(x\varrho) = e_3, \quad \ldots, \quad e_4^x = e_4.(x\varrho) = e_5, \quad e_5^x = e_5.(x\varrho) = e_1,$$

gegeben ist, wobei $e_1, \ldots, e_5$ die Standardbasis des Vektorraums K^5 bezeichne. Beschreiben Sie jeweils alle Teildarstellungen von ϱ.
(*Hinweis.* Verwenden Sie Ihre Kenntnisse zur linearen Algebra.)

Zusatz. Sei $G = \langle x \rangle \cong C_\infty$ eine unendliche zyklische Gruppe. Betrachten Sie die reguläre Darstellung $\varrho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ über $\mathbb{C}$, wobei der (abzählbar) unendlich-dimensionale Vektorraum V die Basis $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ habe und

$$e_i^x = e_i.(x\varrho) = e_{i+1} \qquad \text{für } i \in \mathbb{Z}$$

gelte. Welche Teildarstellungen finden Sie? Gibt es einen $(G\varrho)$-invarianten Untervektorraum $U \ne \{0\}$, der außer $\{0\}$ und U keine weiteren $(G\varrho)$-invarianten Unterräume besitzt?