Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Sommersemester 2020

Darstellungen endlicher Gruppen – Blatt 2

Abgabe der Lösungen bis zum 04.05.2020, 23:59 Uhr per E-Mail-Zusendung (s.u.)

Bitte verfassen Sie Ihre Lösungen mit Hilfe der auf der Internetseite bereitgestellten LaTeX-Template-Datei und produzieren Sie Ihre Abgabe im PDF-Format. Senden Sie diese dann von Ihrer offiziellen hhu-Email-Adresse an:

`sek-az@math.uni-duesseldorf.de` (Betreff: `Uebungsblatt 2, Vorlesung Klopsch`)

Alle weiteren Informationen und Materialien finden Sie bekanntlich auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/DarstEndlGruppen_SS20/`.

Definition. Eine Darstellung $\varrho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ einer Gruppe G auf einem Vektrorraum V heißt *treu*, falls $\mathrm{Kern}(\varrho) = 1$ ist.

Aufgabe 2.1 (4 Punkte)

Sei $G = \langle a, b \mid a^6 = b^2 = 1,\ b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$ eine Diedergruppe der Ordnung 12. Seien

$$A = \begin{pmatrix} e^{\pi i/3} & 0 \\ 0 & e^{-\pi i/3} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}).$$

(a) Zeigen Sie: Durch die Vorgaben $(a\varrho_1, b\varrho_1) = (A, B)$, $(a\varrho_2, b\varrho_2) = (A^3, -B)$, $(a\varrho_3, b\varrho_3) = (-A, B)$, $(a\varrho_4, b\varrho_4) = (C, D)$ werden Darstellungen $\varrho_1, \ldots, \varrho_4$ von G auf $V = \mathbb{C}^2$ festgelegt.

(b) Welche dieser Darstellungen sind treu, welche sind irreduzibel? Welche Paare von Darstellungen sind isomorph zueinander? – Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2.2 (4 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe, und $\varrho\colon G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ eine Darstellung über dem Körper $\mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie: Gibt es $g, h \in G$ mit $(g\varrho)(h\varrho) \neq (h\varrho)(g\varrho)$, so ist ϱ irreduzibel.

(b) Gilt die Umkehrung? – Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2.3 (4 Punkte)

Sei G eine Gruppe, und seien (π, V), (ϱ, W) endlich-dimensionale Darstellugen von G über einem Körper K. Seien $e_1, \ldots, e_m$ und $f_1, \ldots, f_n$ Basen von V und W.
Begründen Sie (ausführlich): Es gibt genau eine Darstellung σ von G auf $V \otimes_K W$ mit der Eigenschaft

$$(e_i \otimes f_j)(g\sigma) = e_i(g\pi) \otimes f_j(g\varrho) \qquad \text{für } 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n \text{ und } g \in G.$$

Weiter erfüllt diese für alle elementaren Tensoren $v \otimes w$ und $g \in G$:

$$(v \otimes w)(g\sigma) = v(g\pi) \otimes w(g\varrho).$$

(*Hinweis.* Definieren Sie zunächst σ als Abbildung $G \to \mathrm{End}(V \otimes_K W)$, in eindeutiger Weise. Prüfen Sie sodann die Gleichung für elementare Tensoren.)

Bemerkung. Die Darstellung σ ist das in der Vorlesung ohne weitere Ausführungen vorgestellte Tensorprodukt $\pi \otimes \varrho$.

Bitte wenden!

Aufgabe 2.4 (4 Punkte)

Sei $G = \langle x \rangle \cong C_5$ eine zyklische Gruppe der Ordnung 5. Betrachten Sie die Darstellung $\varrho\colon G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ auf $V = \mathbb{R}^2$, die durch

$$x\varrho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -w \end{pmatrix}, \qquad \text{mit } w = (1+\sqrt{5})/2,$$

gegeben ist.
Bestimmen Sie $\varrho \otimes \varrho$ und zerlegen Sie diese Darstellung in eine direkte Summe von irreduziblen Darstellungen.

(*Hinweis.* Auf dem Darstellungsraum $W = V \otimes_{\mathbb{R}} V$ von $\varrho \otimes \varrho$ wirkt eine lineare Involution T mit $(v_1 \otimes v_2)^T = v_2 \otimes v_1$ für elementare Tensoren. Starten Sie mit den $\mathbb{R}$-Untervektorräumen

$$S(W) = \{w \in W \mid w^T = w\} \quad \text{und} \quad A(W) = \{w \in W \mid w^T = -w\} \ \ldots)$$