Darstellungen endlicher Gruppen – Blatt 3

Abgabe der Lösungen bis zum 18.05.2020, 23:59 Uhr per E-Mail-Zusendung

Bitte verfassen Sie Ihre Lösungen mit Hilfe der Ihnen bekannten LaTeX-Template-Datei und senden Sie Ihre Abgabe im PDF-Format von Ihrer offiziellen hhu-Email-Adresse an:

`sek-az@math.uni-duesseldorf.de` (Betreff: `Uebungsblatt 3, Vorlesung Klopsch`)

Alle weiteren Informationen und Materialien finden Sie auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/DarstEndlGruppen_SS20/`.

Aufgabe 3.1 (4 Punkte)

Sei $\varrho: G \to \mathrm{GL}(V)$ eine endlich-dimensionale Darstellung einer Gruppe G über dem Körper $\mathbb{C}$. Auf dem Darstellungsraum $W = V \otimes_{\mathbb{C}} V$ von $\sigma = \varrho \otimes \varrho$ wirkt eine lineare Involution T mit $(v_1 \otimes v_2)^T = v_2 \otimes v_1$ für elementare Tensoren. Betrachten Sie die $\mathbb{C}$-Untervektorräume

$$S(W) = \{w \in W \mid w^T = w\} \quad \text{und} \quad A(W) = \{w \in W \mid w^T = -w\}.$$

(a) Zeigen Sie: $S(W)$ und $A(V)$ sind $G\sigma$-invariant, und es gilt $W = S(W) \oplus A(W)$. Folglich ist $\sigma = \sigma_{\mathrm{S}} \oplus \sigma_{\mathrm{A}}$ für entsprechende Teildarstellungen σ_{S} und σ_{A}.

(b) Bestimmen Sie Formeln für die Charaktere ψ, ψ_{S}, ψ_{A} der Darstellungen σ, σ_{S}, σ_{A} in Abhängigkeit von dem Charakter $\chi = \chi_\varrho$ der ursprünglichen Darstellung ϱ.

(*Hinweis.* Versuchen Sie, die Charakterwerte $\psi_{\mathrm{S}}(g)$ und $\psi_{\mathrm{A}}(g)$, für $g \in G$, durch geeignete Werte $\chi(g^m)$ auszudrücken; nehmen Sie hierfür zunächst an, daß $g\varrho$ diagonalisierbar ist.)

Aufgabe 3.2 (4 Punkte)

Sei $\varrho: G \to \mathrm{GL}(V)$ eine endlich-dimensionale Darstellung einer endlichen Gruppe G über dem Körper $\mathbb{C}$.

(a) Beschreiben Sie 'die' kanonische Darstellung $\varrho^*: G \to \mathrm{GL}(V^*)$ von G auf dem Dualraum $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$, abstrakt und mittels geeigneter Darstellungen in Matrixform.

(b) Wie verhalten sich die Charaktere χ_ϱ und χ_{ϱ^*} zueinander?

(c) Sei nun ϱ irreduzibel, und setze $\pi = \varrho^* \otimes \varrho$. Berechnen Sie $\langle \mathbb{1}_G, \chi_\pi \rangle$, wobei $\mathbb{1}_G$ den Charakter der Einsdarstellung bezeichnet, und interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 3.3 (4 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe, und sei ϑ ein Charakter von G mit $\vartheta(g) = 0$ für alle $g \in G \smallsetminus \{1\}$. Zeigen Sie: Dann ist $\vartheta = m.\chi_{\mathrm{reg}}$ ein Vielfaches des Charakters der regulären Darstellung, wobei weiter $m = \vartheta(1)/|G| \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Aufgabe 3.4 (4 Punkte)

Sei $G = \mathrm{Alt}(4)$ die alternierende Gruppe vom Grad 4.

(a) Bestimmen Sie die Konjugationsklassen von G; geben Sie jeweils einen Vertreter und die Größe an. – Begründen Sie knapp Ihre Antwort.

(b) Bestimmen Sie alle irreduziblen Charaktere von G.

(*Hinweis.* Bestimmen Sie zunächst die 1-dimensionalen Darstellungen von G. Betrachten Sie alsdann die natürliche 4-dimensionale Darstellung der Permutationsgruppe G und zerlegen Sie diese in irreduzible Summanden.)