Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Sommersemester 2020

Darstellungen endlicher Gruppen – Blatt 4

Abgabe der Lösungen bis zum 25.05.2020, 23:59 Uhr per E-Mail-Zusendung

Bitte verfassen Sie Ihre Lösungen nach Möglichkeit mit der bekannten LaTeX-Template-Datei und senden Sie Ihre Abgabe im PDF-Format von Ihrer offiziellen hhu-Email-Adresse an:

`sek-az@math.uni-duesseldorf.de` (Betreff: `Uebungsblatt 4, Vorlesung Klopsch`)

Alle weiteren Informationen und Materialien finden Sie auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/DarstEndlGruppen_SS20/`.

Aufgabe 4.1 (4 Punkte)

Bestimmen Sie, bis auf Isomorphie, alle Gruppen der Ordnung 12.

(*Hinweis.* Verwenden Sie die Sylowschen Sätze; es ist wahrscheinlich zweckmäßig, die erste Fallunterscheidung nach der Anzahl der Sylow-3-Untergruppen zu treffen. Für abelsche Gruppen dürfen Sie direkt den allgemeinen Klassifikationssatz anwenden.)

Aufgabe 4.2 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die erweiterte Charaktertafel für die Gruppe

$$G = \langle a, b \mid a^6 = 1,\, a^3 = b^2,\, a^b = a^{-1} \rangle.$$

Geben Sie weiter zu jedem irreduziblen Charakter ϑ vom Grad $\vartheta(1) \geq 2$ eine explizite Matrixdarstellung ϱ mit $\chi_\varrho = \vartheta$ an.

Aufgabe 4.3 (4 Punkte)

Sei $G = H \times K$ eine endliche Gruppe, die sich als direktes Produkt von zwei Untergruppen schreiben läßt.

(a) Beweisen Sie direkt (ohne Charaktertheorie): $k(G) = k(H)k(K)$, wobei $k(X)$ die Anzahl der Konjugationsklassen einer Gruppe X bezeichnet.

(b) Bestimmen Sie die erweiterte Charaktertafeln für G in den konkreten Fällen

$$H = K = C_3 \qquad \text{und} \qquad H = C_3,\, K = \mathrm{Sym}(3).$$

Aufgabe 4.4 (4 Punkte)

Welche der folgenden Eigenschaften einer endlichen Gruppe G lassen sich alleine anhand der Charaktertafel von G feststellen bzw. ausschließen? – Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) Die Gruppe G hat ungerade Ordnung.

(b) Die Gruppe G ist perfekt.

(c) Die Gruppe G ist auflösbar.

(d) Die Gruppe G zerlegt sich als ein direktes Produkt $G = H \times K$ mit nicht-trivialen Faktoren $H, K \neq 1$.