Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Sommersemester 2020

Darstellungen endlicher Gruppen – Blatt 5

Abgabe der Lösungen bis zum 01.06.2020, 23:59 Uhr per E-Mail-Zusendung

Bitte verfassen Sie Ihre Lösungen nach Möglichkeit mit der bekannten LaTeX-Template-Datei und senden Sie Ihre Abgabe im PDF-Format von Ihrer offiziellen hhu-Email-Adresse an:

`sek-az@math.uni-duesseldorf.de` (Betreff: `Uebungsblatt 5, Vorlesung Klopsch`)

Alle weiteren Informationen und Materialien finden Sie auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/DarstEndlGruppen_SS20/`.

Aufgabe 5.1 (4 Punkte)

Betrachten Sie die Gruppe

$$G = \langle a_1, a_2, b \mid a_1^3 = a_2^3 = b^2 = [a_1, a_2] = 1,\ a_1^b = a_1^{-1},\ a_2^b = a_2^{-1} \rangle.$$

(a) Erläutern Sie: $G \cong (C_3 \times C_3) \rtimes C_2$.

(b) Bestimmen Sie $[G, G]$ und $Z(G)$. Ist G auflösbar? Ist G sogar nilpotent?

(c) Berechnen Sie die erweiterte Charaktertafel von G und folgern Sie: G besitzt keine treue irreduziblen Darstellungen über $\mathbb{C}$.
(*Hinweis.* Welche echten Faktorgruppen besitzt G? Konstruieren Sie über diese möglichst viele irreduzible Charaktere.)

Aufgabe 5.2 (4 Punkte)

(a) Sei G die Diedergruppe der Ordnung 8, konkret realisiert als

$$G = \langle (1\,2\,3\,4), (1\,4)(2\,3) \rangle \leq \mathrm{Sym}(4).$$

Sei $\varrho\colon G \to \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ die Darstellung, die sich durch Einschränkung der natürlichen Permutationsdarstellung ergibt. Zerlegen Sie den zugehörigen Charakter χ_ϱ als $\mathbb{Z}$-Linearkombination von irreduziblen Charakteren von G.
(*Hinweis.* Verwenden Sie die Ihnen bekannte Charaktertafel für $G \cong D_8$, die Sie am besten noch einmal ohne weitere Erklärungen angeben.)

(b) Sei $G = \langle a, b \mid a^6 = b^2 = 1,\ a^b = a^{-1} \rangle$ die Diedergruppe der Ordnung 12. Berechnen Sie die erweiterte Charaktertafel von G, indem Sie die allgemeine Behandlung der Diedergruppen aus der Vorlesung in diesem speziellen Fall konkret ausführen. Weisen Sie insbesondere nach, daß alle Einträge der Charaktertafel ganzzahlig sind.

Aufgabe 5.3 (4 Punkte)

Sei $G = \langle a, b \mid a^6 = b^2 = 1,\ a^b = a^{-1} \rangle$ die Diedergruppe der Ordnung 12.

(a) Bestimmen Sie einen Isomorphismus $\varphi\colon G \to \mathrm{Sym}(3) \times C_2$. Berechnen Sie mittels dieser Zerlegung die erweiterte Charaktertafel von G.

(b) Bestimmen Sie über die Charaktertafel von G (wahlweise aus der vorherigen Aufgabe oder aus Aufgabenteil (a)) alle Normalteiler von G.

Bitte wenden!

Aufgabe 5.4 (4 Punkte)

Sei p eine Primzahl und

$$G = \langle x, y, z \mid x^p = y^p = z^p = [x, z] = [y, z] = 1,\ [x, y] = z \rangle.$$

(a) Zeigen Sie: Durch die Vorgaben

$$x\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad y\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad z\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wird ein Isomorphismus φ von G auf eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_p)$ definiert.

(b) Bestimmen Sie $[G, G]$ und $Z(G)$. Folgern Sie: G ist nilpotent der Klasse 2.

(c) Sei $\varrho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ eine irreduzible Darstellung über $\mathbb{C}$ mit $\dim(\varrho) \geq 2$. Zeigen Sie ohne Verwendung der Resultate aus Abschnitt 4 der Vorlesung, die auf Ganzzahligkeitsbetrachtungen beruhen: $\dim(\varrho) = p$.

(*Hinweis.* Überlegen Sie zuerst: $z\varrho = a.\mathrm{id}_V$, wobei $a \in \mathbb{C}$ eine primitive $p$te Einheitswurzel darstellt. Dann wählen Sie für $x\varrho$ einen Eigenvektor $v \in V$, mit Eigenwert $b \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$. Zeigen Sie: Für $0 \leq j < p$ ist $v(y\varrho)^j$ ein Eigenvektor für $x\varrho$, mit Eigenwert $a^{-j}b$. Betrachten Sie den Untervektorraum, der von $v, v(y\varrho), \ldots, v(y\varrho)^{p-1}$ aufgespannt wird.)

(d) Folgern Sie: Die irreduziblen Charaktere von G teilen sich auf in p^2 lineare Charaktere und $p-1$ irreduzible Charaktere vom Grad p.