Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Sommersemester 2020

Darstellungen endlicher Gruppen – Blatt 6

Abgabe der Lösungen bis Dienstag, den 09.06.2020, 23:59 Uhr per E-Mail-Zusendung

Bitte verfassen Sie Ihre Lösungen nach Möglichkeit mit der bekannten LaTeX-Template-Datei und senden Sie Ihre Abgabe im PDF-Format von Ihrer offiziellen hhu-Email-Adresse an:

`sek-az@math.uni-duesseldorf.de` (Betreff: `Uebungsblatt 6, Vorlesung Klopsch`)

Alle weiteren Informationen und Materialien finden Sie auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/DarstEndlGruppen_SS20/`.

Aufgabe 6.1 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie direkt aus der Definition des Ganzheitsbegriffs: Eine rationale Zahl ist genau dann ganz, wenn sie ganzrational ist; also: $\{a \in \mathbb{Q} \mid a \text{ ganz}\} = \mathbb{Z}$.

(b) Sei $a \in \mathbb{C}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$. Begründen Sie: a ist genau dann ganz, wenn das Minimalpolynom $f = \mathrm{Minpol}_{\mathbb{Q}}(a) \in \mathbb{Q}[X]$ von a über $\mathbb{Q}$ bereits in $\mathbb{Z}[X]$ liegt.

(c) Sei $d \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{1\}$ quadratfrei und $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ der zugehörige quadratische Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie den Ganzheitsring von K.

(*Hinweis.* Offenbar liegt $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\sqrt{d}$ im Ganzheitsring. Verwenden Sie nun (b), um zu klären, welche Elemente zusätzlich ganz sind. Dabei hilft es, die Fälle $d \equiv_4 1$ und $d \not\equiv_4 1$ zu unterscheiden.)

Aufgabe 6.2 (4 Punkte)

(a) Beweisen Sie den folgenden Satz von Landau: Für jede vorgegebene Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt es – bis auf Isomorphie – nur endlich viele endliche Gruppen G mit $|\mathrm{Irr}(G)| = k$.

(*Hinweis.* Verwenden Sie die Klassengleichung

$$|G| = \sum_{i=1}^{k} |G : C_G(g_i)|,$$

wobei $g_1, \ldots, g_k$ ein Vertretersystem für die Konjugationsklassen von G bildet.)

(b) Bestimmen Sie für $k \in \{1,2,3\}$ jeweils alle endlichen Gruppen G mit $|\mathrm{Irr}(G)| = k$.

Aufgabe 6.3 (4 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe mit $|G| \equiv_2 1$, und sei $\vartheta \in \mathrm{Irr}(G)$ reellwertig, also $\vartheta = \overline{\vartheta}$.

(a) Erläuern Sie: G ist die disjunkte Vereinigung von $\{1\}$ und $(|G|-1)/2$ geeigneten 2-elementigen Teilmengen der Form $\{g, g^{-1}\}$.

(b) Zeigen Sie: Es existiert eine ganze Zahl $a \in \mathbb{C}$ mit

$$\langle \vartheta, \mathbb{1}_G \rangle = \frac{1}{|G|}(\vartheta(1) + 2a).$$

(c) Folgern Sie aus (b): Es gilt $\vartheta = \mathbb{1}_G$.

(*Bemerkung.* Wir erhalten einen alternativen Beweis für Korollar 3.16 der Vorlesung.)

Bitte wenden!

Aufgabe 6.4 (4 Punkte)

Eine endliche Gruppe G ist eine *Spaßvogelgruppe* („funny group" nach T. Y. Lam), falls die dem Grad nach geordneten irreduziblen Charaktere $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k$ von G genau die Grade $\vartheta_1(1) = 1$, $\vartheta_2(1) = 2$, …, $\vartheta_k(1) = k$ haben.
Wir nennen eine endliche Gruppe G eine *Fast-Spaßvogelgruppe*, falls die dem Grad nach geordneten irreduziblen Charaktere $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k$ von G, bis auf höchstens eine Ausnahme, die entsprechenden Grade haben: Es exisitert ein $d \in \{1, \ldots, k\}$ mit der Eigenschaft

$$\vartheta_j(1) = j \quad \text{für alle } j \in \{1, \ldots, k\} \setminus \{d\}.$$

Beispiel. Die Gruppe $G = \mathrm{Sym}(3)$ hat drei irreduzible Charaktere $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$; dem Grad nach geordnet liefern diese das Gradtupel $(1, 1, 2)$, welches mit $(1, 2, 3)$ nur in einer Position übereinstimmt. Die Gruppe ist daher weder eine Spaßvogelgruppe noch eine Fast-Spaßvogelgruppe, sondern höchstens eine „Quasi-Fast-Spaßvogelgruppe".

(a) Bestimmen Sie alle Spaßvogelgruppen.

(b) Finden Sie zwei Fast-Spaßvogelgruppen, die keine (echten) Spaßvogelgruppen sind.

(*Hinweis.* Die Gruppe $\mathrm{Alt}(5)$ hat fünf Konjugationsklassen. Bestimmen Sie mit Hilfe der aus der Vorlesung bekannten Einschränkungen die Grade $d_1 \leq \ldots \leq d_5$ der irreduziblen Darstellungen von $\mathrm{Alt}(5)$, *ohne* die vollständige Charaktertafel zu bestimmen. Es hilft, sich daran zu erinnern, daß eine Quadratzahl jeweils kongruent zu 0 oder 1 modulo 4 ist.)