Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Sommersemester 2020

Darstellungen endlicher Gruppen – Blatt 7

Abgabe der Lösungen bis Mittwoch, den 17.06.2020, 23:59 Uhr per E-Mail-Zusendung

Bitte verfassen Sie Ihre Lösungen nach Möglichkeit mit der bekannten LaTeX-Template-Datei und senden Sie Ihre Abgabe im PDF-Format von Ihrer offiziellen hhu-Email-Adresse an:

`sek-az@math.uni-duesseldorf.de` (Betreff: `Uebungsblatt 7, Vorlesung Klopsch`)

Alle weiteren Informationen und Materialien finden Sie auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/DarstEndlGruppen_SS20/`.

Aufgabe 7.1 (8 Punkte)

Ziel dieser Aufgabe ist unter anderem die Bestimmung der erweiterten Charaktertafel der Gruppe $G = \mathrm{Alt}(5)$. Als bekannt voraussetzen dürfen Sie vom vorausgehenden Aufgabenblatt her: Die Gruppe G hat fünf Konjugationsklassen, und die Grade der fünf irreduziblen Darstellungen von G sind:

$$\vartheta_1(1) = 1, \quad \vartheta_2(1) = 3, \quad \vartheta_3(1) = 3, \quad \vartheta_4(1) = 4, \quad \vartheta_5(1) = 5.$$

(a) Bestimmen Sie ein geeignetes Vertretersystem $g_1, \ldots, g_5$ für die Konjugationsklassen von G und berechnen Sie $|C_G(g_i)|$ für $1 \leq i \leq 5$. Verifizieren Sie: Jedes Element $g \in G$ ist reell, d. h. konjugiert in G zu seinem Inversen g^{-1}.

(b) Bestimmen Sie ϑ_1 und ϑ_4, d. h. die entsprechenden Zeilen der Charaktertafel.

(*Hinweis.* Betrachten Sie die natürliche Permutationsdarstellung, um einen Charakter vom Grad 5 zu erhalten. Zerlegen Sie diesen dann in irreduzible Bestandteile.)

(c) Bestimmen Sie die Charaktere $(\vartheta_4)_{\mathrm{S}}, (\vartheta_4)_{\mathrm{A}}$ für die zweite symmetrische Potenz und die zweite alternierende Potenz der Darstellung zu ϑ_4. Zerlegen Sie diese als Summen von irreduziblen Charakteren und bestimmen Sie so insbesondere ϑ_5.

(*Hinweis.* Aus Aufgabe 3.1 sind für einen Charakter χ einer endlichen Gruppe G allgemein bekannt: $\chi_{\mathrm{S}}(g) = (\chi(g)^2 + \chi(g^2))/2$ und $\chi_{\mathrm{A}}(g) = (\chi(g)^2 - \chi(g^2))/2$ für alle $g \in G$.)

(d) In natürlicher Weise ist $H = \mathrm{Alt}(4)$ eine Untergruppe von G. Zeigen Sie: Es existiert ein Charakter ψ von H mit $\psi^G = \vartheta_5$. Können die fehlenden irreduziblen Charaktere ϑ_3, ϑ_4 ähnlich als induzierte Charaktere einer geeigneten Untergruppe konstruiert werden?

(e) Verwenden Sie die Spaltenorthogonalitätsrelationen, um ϑ_3, ϑ_4 – und damit die vollständige Charaktertafel von G – zu bestimmen.

(f) Verifizieren Sie anhand der Charaktertafel, daß G eine einfache Gruppe ist.

Aufgabe 7.2 (4 Punkte)

(a) Beweisen Sie den folgenden Satz von Burnside: Sei G eine endliche Gruppe mit $|G| \equiv_2 1$, und sei $k(G)$ die Anzahl der Konjugationsklassen von G. Dann gilt die Kongruenz

$$k(G) \equiv_{16} |G|.$$

(*Hinweis.* Verwenden Sie unter anderem das Ergebnis aus Aufgabe 6.3.)

(b) Folgern Sie: Ist G eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 27, so hat G genau 11 Konjugationsklassen. Wie paßt diese Aussage zu Aufgabe 5.4?

Bitte wenden!

Aufgabe 7.3 (4 Punkte)

Seien $H \leq K \leq G$ Gruppen, und seien $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$ Darstellungen von H sowie $\varrho, \varrho_1, \varrho_2$ Darstellungen von G.

(a) Erläutern bzw. zeigen Sie die folgenden Aussagen aus Abschnitt 5 der Vorlesung, die dort ohne Beweis mitgeteilt wurden:

$$\mathrm{ind}_H^G(\sigma_1 \oplus \sigma_2) \cong \mathrm{ind}_H^G(\sigma_1) \oplus \mathrm{ind}_H^G(\sigma_2) \quad \text{und} \quad \mathrm{ind}_K^G(\mathrm{ind}_H^K(\sigma)) \cong \mathrm{ind}_H^G(\sigma).$$

(*Hinweis.* Verwenden Sie die allgemeine Definition für induzierte Darstellungen aus Abschnitt 5. Für die zweite Behauptung hilft es, konkret Vertretersysteme $(h_i)_{i \in I}$ für die Nebenklassen von K in H und $(g_j)_{j \in J}$ für die Nebenklassen von H in G zu wählen.)

(b) Seinen nun $H \leq K \leq G$ endlich und betrachten Sie endlich-dimensionale Darstellungen von H bzw. G über $\mathbb{C}$. Formulieren und begründen Sie die Aussagen in (a) mit Hilfe der zugeordneten Charaktere.

(*Hinweis.* Verwenden Sie die Formel für induzierte Charaktere aus Abschnitt 5.)