Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Sommersemester 2020

Darstellungen endlicher Gruppen – Blatt 9

Abgabe der Lösungen bis Mittwoch, den 01.07.2020, 23:59 Uhr per E-Mail-Zusendung

Bitte verfassen Sie Ihre Lösungen nach Möglichkeit mit der bekannten LaTeX-Template-Datei und senden Sie Ihre Abgabe im PDF-Format von Ihrer offiziellen hhu-Email-Adresse an:

`sek-az@math.uni-duesseldorf.de` (Betreff: `Uebungsblatt 9, Vorlesung Klopsch`)

Alle weiteren Informationen und Materialien finden Sie auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/DarstEndlGruppen_SS20/`.

Aufgabe 9.1 (4 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe mit irreduziblen Charakteren $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k$ und Konjugationsklassenvertretern $g_1, \ldots, g_k$. Zeigen Sie: Für jedes $i \in \{1, \ldots, k\}$ ist die $i$te „Zeilensumme" der Charaktertafel von G eine ganzrationale Zahl:

$$\sum_{j=1}^{k} \vartheta_i(g_j) \in \mathbb{Z}.$$

(*Hinweis.* Betrachten Sie den Permutationscharakter, der zu der Konjugationswirkung von G auf sich gehört.)

Aufgabe 9.2 (4 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe, und seinen $H \leq G$ und $N \trianglelefteq G$.

(a) Zeigen Sie: Für den induzierten Charakter χ^G eines Charakters χ von H gilt stets

$$\mathrm{Kern}(\chi^G) = \bigcap \{\mathrm{Kern}(\chi)^g \mid g \in G\}.$$

(b) Sei $\vartheta \in \mathrm{Irr}(G)$ mit $\langle \vartheta_N, \mathbb{1}_N \rangle_N \neq 0$. Zeigen Sie: $N \leq \mathrm{Kern}(\vartheta)$.

(*Hinweis.* Verwenden Sie (a).)

Aufgabe 9.3 (4 Punkte)

Finden Sie heraus, welche irreduziblen Charaktere der Gruppe $G = \mathrm{Sym}(4)$ als induzierte Charaktere von einer echten Untergruppe gewonnen werden können und bestimmen Sie für diese jeweils eine Darstellung als induzierter Charakter.

Hinweis. Die Charaktertafel von $G = \mathrm{Sym}(4)$ kennen Sie bereits aus der Vorlesung:

g_i	(1)	$(1\,2)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,2\,3\,4)$
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	24	4	3	8	4
ϑ_1	1	1	1	1	1
ϑ_2	1	-1	1	1	-1
ϑ_3	2	0	-1	2	0
ϑ_4	3	1	0	-1	-1
ϑ_5	3	-1	0	-1	1

Aufgabe 9.4 (4 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe und sei $\mathcal{H}$ die Menge aller zyklischen Untergruppen von G.

(a) Erklären Sie mit Hilfe der Resultate aus der Vorlesung:

$$I(G) = \{d \in \mathbb{Z} \mid d\mathbb{1}_G = \sum_{H \in \mathcal{H}} a_H (\mathbb{1}_H)^G \text{ mit Koeffizienten } a_H \in \mathbb{Z}\}$$

ist ein von 0 verschiedenes Ideal von $\mathbb{Z}$.

(b) Der *Artinsche Exponent* der Gruppe G ist diejenige Zahl $a(G) \in \mathbb{N}$, für die $I(G) = a(G)\mathbb{Z}$ gilt; siehe (a).

Berechnen Sie den Artinschen Exponenten für die folgenden Gruppen:

$$G \cong C_m \text{ für } m \in \mathbb{N}, \qquad G \cong C_2^m \text{ für } m \in \mathbb{N}, \qquad G \cong D_8, \qquad G \cong \mathrm{Sym}(3).$$