Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Sommersemester 2020

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Darstellungen endlicher Gruppen – Blatt 10

Abgabe der Lösungen bis Mittwoch, den 08.07.2020, 23:59 Uhr per E-Mail-Zusendung

Bitte verfassen Sie Ihre Lösungen nach Möglichkeit mit der bekannten LaTeX-Template-Datei und senden Sie Ihre Abgabe im PDF-Format von Ihrer offiziellen hhu-Email-Adresse an:

`sek-az@math.uni-duesseldorf.de` (Betreff: `Uebungsblatt 10, Vorlesung Klopsch`)

Alle weiteren Informationen und Materialien finden Sie auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/DarstEndlGruppen_SS20/`.

Aufgabe 10.1 (4 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe und χ ein treuer Charakter von G, also $\mathrm{Kern}(\chi) = 1$. Sei weiter $r := |\{\chi(g) \mid g \in G\}|$ und $\vartheta \in \mathrm{Irr}(G)$.

(a) Zeigen Sie: Für wenigstens ein $j \in \{1, \dots, r\}$ kommt ϑ unter den irreduziblen Komponenten des Charakters χ^{j-1} vor.

(*Hinweis.* Es genügt, zu zeigen, daß $\langle \chi^{j-1}, \vartheta \rangle$ für wenigstens ein $j \in \{1, \dots, r\}$ ungleich 0 ist. Schreiben Sie dazu geeignet

$$|G| \cdot \left(\langle \chi^{j-1}, \vartheta \rangle \right)_{j=1}^{r} = \mathbf{b}_\vartheta \mathbf{A}_\chi$$

für einen Vektor $\mathbf{b}_\vartheta \in \mathbb{C}^r \smallsetminus \{\mathbf{0}\}$ und eine Vandermonde-Matrix $\mathbf{A}_\chi \in \mathrm{Mat}_r(\mathbb{C})$.)

(b) Kommentieren Sie kurz den Spezialfall $\chi = \chi_{\mathrm{reg}}$, der reguläre Charakter.

Aufgabe 10.2 (4 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe und χ ein Charakter von G, der nicht treu ist; es ist also $\mathrm{Kern}(\chi) \neq 1$. Zeigen Sie: Es existiert $\vartheta \in \mathrm{Irr}(G)$ dergestalt, daß für alle $j \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\langle \chi^j, \vartheta \rangle = 0$.

Bemerkung. Die Aussage bildet ein passendes Gegenstück zu Aufgabe 10.1.

Aufgabe 10.3 (4 Punkte)

Die projektive spezielle lineare Gruppe $\mathrm{PSL}(2,7)$ ist die Faktorgruppe $\mathrm{SL}(2,7)/\{\mathrm{I}, -\mathrm{I}\}$, wobei $\mathrm{SL}(2,7)$ die spezielle lineare Gruppe vom Grad 2 über einem Körper mit 7 Elementen bezeichnet.

(a) Finden Sie einen Isomorphismus von $\mathrm{PSL}(2,7)$ auf die Permutationsgruppe

$$G = \langle (1\,2\,3\,4\,5\,6\,7)(8),\ (1\,2\,4)(3\,6\,5)(7)(8),\ (1\,6)(2\,3)(4\,5)(7\,8) \rangle \leq \mathrm{Sym}(8).$$

Folgern Sie: $\mathrm{PSL}(2,7)$ hat die Ordnung 168.

(*Hinweis.* Die Gruppe $\mathrm{SL}(2,7)$ operiert von links 2-transitiv auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1\mathbb{F}_7 = \mathbb{F}_7 \cup \{\infty\}$ mittels $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right).z = (az+b)/(cz+d)$.)

(b) Bestimmen Sie die Konjugationsklassen der Gruppe $\mathrm{PSL}(2,7) \cong G$.

(*Hinweis.* Sie sollten insgesamt sechs Klassen erhalten.)

Aufgabe 10.4 (4 Punkte)

Sei $G = \mathrm{PSL}(2,7)$; vergleiche Aufgabe 10.3. Ziel dieser Aufgabe ist die Berechnung der erweiterten Charaktertafel von G. Wir betrachten dazu

$$B = \left\{ \overline{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}} \mid a \in \mathbb{F}_7^\times, b \in \mathbb{F}_7 \right\}.$$

(a) Übernehmen Sie die Konjugationsklassenvertreter $g_1, \ldots, g_6$ aus Aufgabe 10.3 und bestimmen Sie $|\mathrm{C}_G(g_i)|$ für $1 \leq i \leq 6$.

(b) Bestimmen Sie den induzierten Charakter $(\mathbb{1}_B)^G$ und zeigen Sie, daß sich dieser wie folgt zerlegt:

$$(\mathbb{1}_B)^G = \mathbb{1}_G + \chi \qquad \text{mit } \chi \in \mathrm{Irr}(G).$$

(*Hinweis.* Was hat die Gruppe B mit der Wirkung von G auf der projektiven Geraden wie in Aufgabe 10.3(a) zu tun?)

(c) Bestimmen Sie einen linearen Charakter $\lambda \neq \mathbb{1}_B$ von B, berechnen Sie den induzierten Charakter λ^G und zeigen Sie: $\lambda^G \in \mathrm{Irr}(G)$.

(d) Bestimmen Sie als nächstes den Charakter χ_{S} zu der zweiten symmetrischen Potenz der Darstellung mit Charakter χ. Zerlegen Sie χ_{S} in irreduzible Bestandteile und finden Sie so einen irreduziblen Charakter der Gruppe G vom Grad 6.

(*Hinweis.* Dies ist ein ganz klein wenig komplizierter als in den bisherigen Aufgaben vom gleichem Typ.)

(e) Verwenden Sie die Orthogonalitätsrelationen, um die erweiterte Charaktertafel von G zu vervollständigen.

(*Hinweis.* Wieviele reelle Konjugationsklasse und daher reellwertige irreduzible Charktere gibt es?)

(f) Beobachten Sie von der Charaktertafel, daß G eine einfache Gruppe ist.