Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2012
10. April 2012
Blatt 1

Übungen zu Differentialtopologie

1. (8 Punkte) Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ sei
$$M_n := \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x_0^2 \right\}.$$
   (a) Skizzieren Sie M_n für $n = 2$ und $n = 3$.
   (b) Zeigen Sie, dass M_n keine topologische Mannigfaltigkeit ist.

2. (16 Punkte) Führen Sie das Beispiel (3) von § 1 der Vorlesung aus, das heißt: Es sei
$$S^n := \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 1 \right\},$$
und sei $N := (0, \dots, 0, 1)$ der Nordpol und S : = (0, . . . , 0, -1) der Südpol von S^n. Mit $\varphi_N : S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ und $\varphi_S : S^n \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir die stereographischen Projektionen.
   (a) Beschreiben Sie die Abbildungen φ_N und φ_S durch Formeln.
   (b) Zeigen Sie, dass φ_N und φ_S Homöomorphismen sind.
   (c) Zeigen Sie, dass die beiden Karten
$$c_N = (S^n \setminus \{N\}, \varphi_N), \quad c_S = (S^n \setminus \{S\}, \varphi_S)$$
   miteinander verträglich sind und einen Atlas $\mathcal{A}$ von S^n bilden.

3. (16 Punkte) Für $i = 0, 1, \dots, n$ und $\varepsilon = \pm 1$ sei
$$U_i^\varepsilon := \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid \varepsilon x_i > 0\}.$$
   (a) S^n ist die Vereinigung der U_i^ε.
   (b) Definiere $\varphi_i^\varepsilon : U_i^\varepsilon \to \mathbb{R}^n$ durch
$$\varphi_i^\varepsilon(x_0, \dots, x_n) := (x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n),$$
   das heißt, die i-te Koordinate wird weggelassen.
   Zeigen Sie, dass $c_i^\varepsilon := (U_i^\varepsilon, \varphi_i^\varepsilon)$ eine Karte von S^n ist.
   (c) Zeigen Sie, dass je zwei dieser Karten miteinander verträglich sind. Die c_i^ε bilden also einen Atlas $\mathcal{A}'$ von S^n.
   (d) Sei $\mathcal{A}$ der Atlas aus Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die maximalen Atlanten $\widehat{\mathcal{A}}$ und $\widehat{\mathcal{A}'}$ gleich sind.

Abgabe: Dienstag, den 17. April 2012, 10:30 Uhr