Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2012
15. Juni 2012
Blatt 10

Übungen zu Differentialtopologie

34. (16 Punkte) Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $C^\infty(X)$ die Menge aller glatten Funktionen von X in $\mathbb{R}$. Für $x \in X$ sei $\mathcal{T}_x(X)$ der Vektorraum aller linearen Abbildungen

$$v : C^\infty(X) \to \mathbb{R},$$

für die gilt: Sind $f, g \in C^\infty(X)$, so ist

$$v(fg) = v(f)g(x) + f(x)v(g).$$

Zeigen Sie:

(a) Ist $f : X \to \mathbb{R}$ eine konstante Funktion und $v \in \mathcal{T}_x(X)$, so ist $v(f) = 0$.

(b) Ist die Funktion $f \in C^\infty(X)$ konstant in einer Umgebung von x und ist $v \in \mathcal{T}_x(X)$, so ist $v(f) = 0$.

(c) Ist U eine offene Umgebung von x in X, so gibt es einen kanonischen Isomorphismus von $\mathcal{T}_x(U)$ auf $\mathcal{T}_x(X)$.

(d) Zeigen Sie: Man erhält eine injektive lineare Abbildung

$$\phi : T_x(X) \to \mathcal{T}_x(X),$$

$$(\phi\,[h])(f) := (f \circ h)'(0)$$

für $h \in \mathcal{M}(X, x)$ und $f \in C^\infty(X)$.

35. (8 Punkte)

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt mit $f(0) = 0$. Definiert man $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) := \int_0^1 f'(tx)dt,$$

so ist $f(x) = xg(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Sei U eine offene Kugel in $\mathbb{R}^n$ mit Mittelpunkt 0 und sei $f : U \to \mathbb{R}$ glatt mit $f(0) = 0$. Zeigen Sie, dass es glatte Funktionen $g_1, \ldots, g_n : U \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x)$$

für alle $x \in U$.

36. (8 Punkte) Sei U eine offene Kugel in $\mathbb{R}^n$ mit Mittelpunkt 0. Für $1 \leq i \leq n$ definieren wir $D_i : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$ durch
$$D_i f := \frac{\partial f}{\partial x_i}(0).$$
Zeigen Sie, dass mit den Bezeichnungen von Aufg. 34 gilt: $\mathcal{T}_0(U)$ ist der Vektorraum mit der Basis $D_1, \ldots, D_n$.

37. (8 Punkte) Die Bezeichnungen seien wie in Aufg. 34. Zeigen Sie, dass $\phi : T_x(X) \to \mathcal{T}_x(X)$ ein Isomorphismus ist.

Abgabe: Freitag, den 22. Juni 2012, 10:30 Uhr