Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2012
22. Juni 2012
Blatt 11

Übungen zu Differentialtopologie

38. (10 Punkte) Seien $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ Vektorbündel über der Basis B. Es sei $\xi_1 \cong_B \xi_2$ und $\eta_1 \cong_B \eta_2$, wobei wir mit $\cong_B$ die B-Isomorphie von zwei Vektorbündeln bezeichnen. Zeigen Sie, dass
$$\xi_1 \oplus \eta_1 \cong_B \xi_2 \oplus \eta_2.$$

39. (10 Punkte) Seien ξ und η Vektorbündel über der Basis B und sei $f : B' \to B$ eine glatte Abbildung. Zeigen Sie, dass
$$f^*(\xi \oplus \eta) \cong_B f^*(\xi) \oplus f^*(\eta).$$

40. (10 Punkte) Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $C^\infty(X)$ die Menge aller glatten Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$. Mit $\mathrm{Der}(C^\infty(X))$ bezeichnen wir den Vektorraum der Derivationen von $C^\infty(X)$, also aller linearen Abbildungen
$$D : C^\infty(X) \to C^\infty(X),$$
für die gilt:
$$D(fg) = D(f)g + fD(g).$$
   (a) Zeigen Sie: Sind $D, E \in \mathrm{Der}(C^\infty(X))$, so ist
   $$[D, E] := D \circ E - E \circ D \in \mathrm{Der}(C^\infty(X)).$$
   (b) Für $X = \mathbb{R}$ betrachten wir $D, E \in \mathrm{Der}(C^\infty(\mathbb{R}))$ mit
   $$D = x\frac{d}{dx},$$
   $$E = x^2\frac{d}{dx}.$$
   (Damit ist gemeint: Für $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ist
   $$(Df)(x) = xf'(x).)$$
   Berechnen Sie $[D, E]$.

(c) Zeigen Sie (am besten unter Benutzung von Blatt 10): Die Elemente von $\mathrm{Der}(C^\infty(\mathbb{R}))$ sind genau die Abbildungen der Form

$$D = F(x)\frac{d}{dx}$$

mit $F \in C^\infty(\mathbb{R})$, wobei die Bezeichnung wie in (b) ist.

41. (10 Punkte) Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\Gamma(\tau(X))$ der Vektorraum der Schnitte des Tangentialbündels von X, also der Vektorfelder auf X. Zeigen Sie, dass man einen Isomorphismus

$$\Gamma(\tau(X)) \longrightarrow \mathrm{Der}(C^\infty(X))$$

$$S \longmapsto \hat{S}$$

erhält durch

$$(\hat{S}f)(x) := (\phi(S(x)))(f),$$

wobei ϕ wie auf Blatt 10 definiert ist.

Abgabe: Freitag, den 29. Juni 2012, 10:30 Uhr