Übungen zu Differentialtopologie

42. (10 Punkte) Auf der Mannigfaltigkeit $X = \mathbb{R}$ betrachten wir das Vektorfeld Y, das gegeben ist durch
$$Y(x) = (x, x^2).$$
Berechnen Sie die Teilmenge Ω_Y von $\mathbb{R}^2$ und den maximalen Fluss
$$\phi_Y : \Omega_Y \to \mathbb{R}.$$

43. (15 Punkte)

    (a) Zeigen Sie die folgende Verallgemeinerung von Satz 11.3:
    Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und sei Y ein Vektorfeld auf X, das kompakten Träger hat. Dann ist $\Omega_Y = \mathbb{R} \times X$, d. h. der maximale Fluss von Y ist eine glatte Operation von $\mathbb{R}$ auf X.

    (b) Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und Y ein Vektorfeld auf X. Sei $x \in X$ und sei $\varphi_x : J(x) \to X$ die Integralkurve von Y mit $\varphi_x(0) = x$ und maximalem Definitionsbereich. Zeigen Sie: Ist $\varphi_x(J(x))$ in einer kompakten Teilmenge von X enthalten, so ist $J(x) = \mathbb{R}$.

    (c) Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine glatte beschränkte Funktion und sei Y das Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$, das gegeben ist durch
    $$Y(x) = (x, F(x)).$$
    Zeigen Sie, dass $\Omega_Y = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

44. (15 Punkte) Auf der Mannigfaltigkeit $X = \mathbb{R}^2$ betrachten wir das Vektorfeld Y, das gegeben ist durch
$$Y(x, y) = ((x, y), (\sin y, \cos^{2N} y)),$$
wobei N eine feste natürliche Zahl ist. Finden Sie einige explizite Integralkurven von Y und benutzen sie diese und die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen einschließlich Aufg. 43 (c), um eine Skizze der Bilder aller Integralkurven in $\mathbb{R}^2$ zu erstellen.

Abgabe: Freitag, den 6. Juli 2012, 10:30 Uhr