Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2012
17. April 2012
Blatt 2

Übungen zu Differentialtopologie

4. (12 Punkte) Führen Sie das Beispiel (4) von § 1 im Detail aus, d. h.: Seien X und X' topologische Räume und sei $f : X \to X'$ ein Homöomorphismus.

   (a) Ist $c = (U, \varphi)$ eine Karte von X, so ist $f(c) := (f(U), \varphi \circ (f \mid U)^{-1})$ eine Karte von X'.

   (b) Sind die Karten c und c' von X verträglich, so sind auch die Karten $f(c)$ und $f(c')$ verträglich.

   (c) Ist $\mathcal{A}$ ein Atlas von X, so ist $f(\mathcal{A}) := \{f(c) \mid c \in \mathcal{A}\}$ ein Atlas von X'.

   (d) Ist $(X, \mathcal{A})$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, so auch $(X', f(\mathcal{A}))$.

5. (8 Punkte) Im Beispiel (5) von § 1 haben wir jeden n-dimensionalen reellen Vektorraum V zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit gemacht; dabei haben wir einen Vektorraum-Isomorphismus $f : \mathbb{R}^n \to V$ gewählt. Zeigen Sie, dass das Ergebnis nicht von der Wahl von f abhängt.

6. (10 Punkte) Wir betrachten den 2-dimensionalen Torus T. Zeigen Sie:

   (a) T besitzt einen Atlas, der aus 2 Karten besteht.

   (b) T besitzt einen Atlas, der aus 3 Karten besteht, von denen jede einen zu $\mathbb{R}^2$ homöomorphen Definitionsbereich hat.

   (Es genügt, Skizzen anzufertigen; bei dieser Aufgabe ist Ihr geometrisches Vorstellungsvermögen, nicht Ihre technische Fertigkeit gefordert.)

7. (10 Punkte) Beweisen Sie die beiden Behauptungen der Bemerkung 1 von § 2.

Abgabe: Dienstag, den 24. April 2012, 10:30 Uhr