Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2012
24. April 2012
Blatt 3

Übungen zu Differentialtopologie

4. (10 Punkte) Sei $S^2 = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ und sei $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch
$$f(x_0, x_1, x_2) := (x_1, x_2).$$
   (a) Zeigen Sie, dass f glatt ist.
   (b) Berechnen Sie $\mathrm{Rg}_x(f)$ für alle $x \in S^3$.

5. (6 Punkte) Seien X, Y differenzierbare Mannigfaltigkeiten, sei $x \in X$ und sei $f : X \to Y$ glatt. Zeigen Sie: Es gibt eine Umgebung U von x in X mit
$$\mathrm{Rg}_y(f) \geq \mathrm{Rg}_x(f)$$
für alle $y \in U$.

6. (12 Punkte)
   (a) Sei $f : X \to Y$ eine Submersion und $g : Y \to Z$ eine Immersion. Zeigen Sie, dass $g \circ f$ konstanten Rang auf X hat, falls X zusammenhängend ist.
   (b) Zeigen Sie: Die Abbildung $f : t \mapsto (t, t^2, t^3)$ von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^3$ ist ein Immersion, die Abbildung $g : (x, y, z) \mapsto (y, z)$ von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$ ist ein Submersion, aber $g \circ f$ hat nicht konstanten Rang.

7. (12 Punkte) Seien X, Y differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $x \in X, y \in Y$.
   (a) Bestimmen Sie das Bild der Abbildung
$$(pr_{1*}, pr_{2*}) : \mathcal{M}(X \times Y, (x, y)) \to \mathcal{M}(X, x) \times \mathcal{M}(Y, y).$$
   (b) Folgern Sie aus dem Ergebnis von (a), dass
$$(T_{(x,y)}(pr_1), T_{(x,y)}(pr_2)) : T_{(x,y)}(X \times Y) \to T_x(X) \times T_y(Y)$$
   ein Isomorphismus ist.

Abgabe: Freitag, den 4. Mai 2012, 10:30 Uhr