Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2012
18. Mai 2012
Blatt 6

Übungen zu Differentialtopologie

19. (12 Punkte) Zeigen Sie:

    (a) Ist X ein topologischer Raum mit abzählbarer Basis, so gibt es in X eine abzählbare dichte Teilmenge.

    (b) Sei X ein metrischer Raum, der eine abzählbare dichte Teilmenge enthält. Dann besitzt die Topologie von X eine abzählbare Basis.

    (c) Für einen topologischen Raum X sind äquivalent:

        i. X ist eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

        ii. X ist metrisierbar, es gibt eine abzählbare dichte Teilmenge in X, und es gilt: Ist $x \in X$, so existiert eine n-dimensionale Karte von X, in deren Definitionsbereich x liegt.

    („abzählbar" bedeutet hier: „ abzählbar unendlich oder endlich")

20. (8 Punkte) Wir betrachten die glatte Abbildung $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ aus Aufgabe 4. Bestimmen Sie die Menge der kritischen Werte von f.

21. (10 Punkte) Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und seien A, B abgeschlossene Teilmengen von X mit $A \cap B = \emptyset$. Zeigen Sie, dass es eine glatte Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ gibt mit folgenden Eigenschaften:

$$0 \leq f(x) \leq 1 \;\; \forall x \in X,$$
$$f(x) = 0 \;\; \forall x \in A,$$
$$f(x) = 1 \;\; \forall x \in B.$$

22. (10 Punkte) Sei X ein vollständig regulärer Raum und Λ die Menge aller stetigen Abbildungen von X in $[0, 1]$. Im Beweis von Satz 5.7 haben wir die offensichtliche Abbildung

$$j : X \to [0, 1]^\Lambda$$

    betrachtet. Um zu zeigen, dass j ein Homöomorphismus von X auf $j(X)$ ist, ist noch nachzuweisen:

    (a) j ist injektiv.

    (b) j ist eine offene Abbildung.

    (Bei beiden Teilaufgaben benutze man das Lemma 1 aus dem Beweis von Satz 5.7.)

Abgabe: Freitag, den 25. Mai 2012, 10:30 Uhr