Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2012
25. Mai 2012
Blatt 7

Übungen zu Differentialtopologie

23. (8 Punkte) Sei U offen in $\mathbb{R}^m$ und sei K kompakt in U. Ist $f : U \to \mathbb{R}$ glatt, so definiere

$$||\, f \,||_K := \max\{|\, f(x)\,|\,|\, x \in K\} + \sum_{i=1}^{m} \max\left\{|\,\frac{\partial f}{\partial xj}\,(x)\,|\,|\, x \in K\right\}.$$

Zeigen Sie: Sind $f, g : U \to \mathbb{R}$ glatt, so ist

$$||\, f + g \,||_K \leq \,||\, f \,||_K + ||\, g \,||_K$$
$$||\, f \cdot g \,||_K \leq \,||\, f \,||_K \cdot ||\, g \,||_K.$$

24. (12 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Ist X eine kompakte n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, so gibt es keine Immersion von X in $\mathbb{R}^n$.

(b) Sei T der 2-dimensionale Torus, $x \in T$ und $X := T \setminus \{x\}$. Zeigen Sie, dass es eine Immersion von X in $\mathbb{R}^2$ gibt. (Eine Skizze genügt.)

25. (12 Punkte) Sei A die folgende Teilmenge von $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x,0)\,|\, x \geq 0\} \cup \{(0,y)\,|\, y \geq 0\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass es eine glatte Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gibt mit $f(\mathbb{R}) = A$.

(b) Zeigen Sie, dass es keine Immersion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gibt mit $f(\mathbb{R}) = A$.

26. (8 Punkte) Sei X eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie: X besitzt einen Altas $\mathcal{A}$, so dass für jede Karte $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ gilt: Es gibt eine glatte Abbildung $\psi : X \to \mathbb{R}^n$ mit $\psi \,|\, U = \varphi$.

Abgabe: Freitag, den 1. Juni 2012, 10:30 Uhr