Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2012
1. Juni 2012
Blatt 8

Übungen zu Differentialtopologie

27. (8 Punkte) Führen Sie detailliert den Beweis des folgenden Lemmas aus §8 aus: Ist X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, so gibt es eine eigentliche glatte Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$.

28. (12 Punkte) Auf S^n betrachten wir die Äquivalenzrelation $\sim$ mit
$$x \sim y :\Leftrightarrow x = \pm y.$$
Sei $P^n := S^n/\sim$ mit der Quotiententopologie und sei $p : S^n \to P^n$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie:
    (a) P^n ist eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.
    (b) Man kann P^n auf genau eine Weise zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit machen, so dass p ein lokaler Diffeomorphismus ist.

29. (20 Punkte) Wir definieren eine glatte Abbildung
$$\phi = (\phi_0, \ldots, \phi_{2n}) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{2n+1}$$
durch
$$\phi_k(x_0, \ldots, x_n) := \sum_{i+j=k} x_i x_j.$$
Zeigen Sie:
    (a) Ist $x \neq 0$, so ist $\phi(x) \neq 0$.
    (b) Ist $x \neq 0$, so hat $D\phi(x)$ den Rang $n+1$.
    (c) Sind $x, y \in S^n$ mit $\phi(x) = \phi(y)$, so ist $x = \pm y$.
    (d) ϕ induziert eine Einbettung φ von P^n in $\mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{0\}$.
    (e) Die Abbildung $\varphi/||\varphi|| : P^n \to S^{2n}$ ist injektiv und nicht surjektiv. (Man kann zeigen, dass man damit eine Einbettung von P^n in $\mathbb{R}^{2n} = S^{2n} \setminus \{Punkt\}$ erhält.)

Abgabe: Freitag, den 8. Juni 2012, 10:30 Uhr