Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Übungsblatt 3

Prof. Dr. Jürgen Saal
Christiane Bui, Elisabeth Reichwein
Wintersemester 2019/2020

Ausgabe: Di., 22.10.2019, Abgabe: Di., 29.10.2019

Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

B **Aufgabe 3.1:** (9 Punkte)
Konstruieren Sie zu gegebenem $u_0 \in BC(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$ eine Lösung $u \in BC(\mathbb{R}^2) \cap C^1(\mathbb{R}^2)$ der Transportgleichung

$$u_x(x,y) - u_y(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Gibt es eine eindeutige Lösung in $BC(\mathbb{R}^2) \cap C^1(\mathbb{R}^2)$? Hängen die Lösungen stetig von den Daten ab (jeweils bzgl. der Supremumsnorm)?

Hinweis: Für ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $BC(G) := \{\varphi \in C(G) : \sup_{x \in G} |\varphi(x)| < \infty\}$.
Hinweis: Zur Konstruktion einer Lösung betrachte man die Funktion $s \mapsto u(x-s,\, y+s)$.
Hinweis: Zur Klärung der Eindeutigkeitsfrage genügt es, den Fall $u_0 = 0$ zu betrachten.

B **Aufgabe 3.2:** (3+3+3 Punkte)
Sei $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$.

(i) Zeigen Sie, dass

$$\|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{y \to 0} 0.$$

(ii) Zeigen Sie, dass der Gaußkern

$$G_t(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0,$$

für jedes $t > 0$ die Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_t(x)\, dx = 1$$

erfüllt.

(iii) Zeigen Sie unter Verwendung von (i) und (ii), dass

$$\|G_t * f - f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{t \to 0} 0.$$

Aufgabe 3.3:
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Klassifizieren Sie die folgenden linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung nach den Kategorien elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch:

(i) $\Delta_x u(x) = f(x)$ mit $u, f : G \to \mathbb{R}$,

(ii) $\partial_{tt} u(t,x) - \Delta_x u(t,x) = f(t,x)$ mit $u, f : \mathbb{R}_+ \times G \to \mathbb{R}$,

(iii) $\partial_t u(t,x) - \Delta_x u(t,x) = f(t,x)$ mit $u, f : \mathbb{R}_+ \times G \to \mathbb{R}$,

(iv)

$$\partial_{tt} u(t,x) - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(t,x) - \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x) \partial_{x_i} u(t,x) = f(t,x),$$

wobei die Matrizen $A(t,x) = (a_{ij}(t,x))_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit seien und $b(t,x) = (b_i(t,x))_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ und $u, f : \mathbb{R}_+ \times G \to \mathbb{R}$.

Hinweis: Für $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (t,x) \mapsto u(t,x)$ wird der Laplace Operator nur in den Raumvariablen angewandt, d.h. $\Delta_x u := \Delta u = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2 u$.