Übungsblatt 13

Funktionentheorie, SoSe 2019

Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Ausgabe: Di., 25.06.2019, Abgabe: Di., 02.07.2019

Aufgabe 1: (Isolierte Singularitäten, $2+2+2$ Punkte)
Bestimmen Sie jeweils die isolierten Singularitäten und die Art der jeweiligen Singularität für die Funktionen f, g und h. Bestimmen Sie dabei für jede hebbare Singularität eine holomorphe Fortsetzung und für jeden Pol dessen Ordnung.

a) $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{z^4 - \pi^2 z^2}$ b) $g(z) = \dfrac{1}{z} \exp\left(\dfrac{1}{1-z}\right)$ c) $h(z) = \cos\left(\dfrac{1}{z}\right)$

Aufgabe 2: (Ganze Funktionen, $3+3$ Punkte)
Sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Zeigen Sie:

a) Gilt
$$|f(z)| \geq C|z|^n, \qquad |z| > \rho,$$
mit $n \in \mathbb{N}$ und Konstanten ρ, $C > 0$, dann ist f ein Polynom mit $\deg f \geq n$.

b) Ist f kein Polynom, dann ist $f(\mathbb{C} \setminus \bar{D}_\varepsilon(0))$ dicht in $\mathbb{C}$ für jedes $\varepsilon > 0$.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $g(z) = f(\frac{1}{z})$ für $z \neq 0$.

Aufgabe 3: (Transformationssatz für Residuen, 4 Punkte)
Seien $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $a \in \Omega$ und $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Sei $f : g(\dot{\Omega}) \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, wobei $\dot{\Omega} := \Omega \setminus \{a\}$. Zeigen Sie, dass
$$\operatorname{res}_f(g(a)) = \operatorname{res}_{(f\circ g)g'}(a)$$

Hinweis: $g(a)$ ist eine isolierte Singularität der Funktion $f : g(\dot{\Omega}) \longrightarrow \mathbb{C}$ und a ist eine isolierte Singularität der Funktion $(f \circ g) \cdot g' : \dot{\Omega} \longrightarrow \mathbb{C}$.