

Übungsblatt 14

Funktionentheorie, SoSe 2019

Dr. Matthias Köhne



Ausgabe: Di., 02.07.2019, Abgabe: Di., 09.07.2019

Aufgabe 1: (Laurententwicklungen, 2 + 2 + 2 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils die isolierten Singularitäten, die Art der jeweiligen Singularität und die Residuen für die jeweiligen Singularitäten für die Funktionen f , g und h . Bestimmen Sie weiterhin die Laurententwicklungen der Funktionen f , g und h jeweils in $\dot{D}_1(0)$ und $D_{1,\infty}(0)$.

$$\text{a) } f(z) = \frac{1 - \cos(z)}{z^2} \quad \text{b) } g(z) = \frac{1}{1 + z^2} \quad \text{c) } h(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z}$$

HINWEIS: $\dot{D}_1(0) = D_1(0) \setminus \{0\}$ und $D_{1,\infty}(0) = \mathbb{C} \setminus \bar{D}_1(0)$.

Aufgabe 2: (Isolierte Singularitäten, 2 + 2 Punkte)

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha > 1$ sowie $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Bestimmen Sie jeweils die isolierten Singularitäten, die Art der jeweiligen Singularität und die Residuen für die jeweiligen Singularitäten für die Funktionen f und g .

$$\text{a) } f(z) = \frac{4z}{(z^2 + 2\alpha z + 1)^2} \quad \text{b) } g(z) = \frac{h(z)}{1 + z^n}$$

Aufgabe 3: (Residuensatz, 4 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Kurvenintegrale mit Hilfe des Residuensatzes.

a) Für das Quadrat $Q = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}z|, |\operatorname{Im}z| < 2\}$ das Kurvenintegral

$$\int_{\partial Q} \frac{1 + \sin(\pi z)}{z(z-1)^2} dz;$$

b) Für die Kreisscheibe $D_5(0)$ das Kurvenintegral

$$\int_{\partial D_5(0)} \frac{e^z}{\cos(z)} dz.$$