Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Sommersemester 2016

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Darstellungstheorie reduktiver Gruppen – Blatt 2

Abgabe der Lösungen am 27.04.2016 in der Vorlesung

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 2.3 und 2.4 ab, die übrigen Aufgaben bereiten Sie eigenständig für die Übungsstunde vor; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenII_SS16/`.

Alle Varietäten seien über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k definiert.

Aufgabe 2.1

Sei $\varphi\colon X \to Y$ ein endlicher Morphismus zwischen affinen Varietäten X, Y. Zeigen Sie: Für jede affine Varietät Z ist $X \times Z \to Y \times Z$, $(x,z) \mapsto (\varphi(x), z)$ ein endlicher Morphismus.

Aufgabe 2.2

(a) Zeigen Sie: Jeder gaußsche Ring ist ganzabgeschlossen.
(b) Folgern Sie: Polynomringe $F[T_1, \dots, T_n]$ über einem Körper F sind ganzabgeschlossen.
(c) Erläutern Sie, weshalb $\mathbb{C}[X,Y]/(X^2 - Y^3)$ nicht ganzabgeschlossen ist.

Aufgabe 2.3 (4 Punkte)

Zeigen Sie: Eine irreduzible affine Varietät X is normal genau dann, wenn der Koordinatenring $k[X]$ ganzabgeschlossen ist.

Aufgabe 2.4 (6 Punkte)

Sei $\varphi\colon G \to H$ ein Homomorphismus zwischen algebraischen Gruppen. Zeigen Sie:
(a) $\dim G = \dim \mathrm{Kern}(\varphi) + \dim \mathrm{Bild}(\varphi)$.
(b) Ist G zusammenhängend, φ surjektiv und $\dim G = \dim H$, so ist $\mathrm{Kern}(\varphi)$ endlich und liegt im Zentrum $Z(G) = \{g \in G \mid \forall x \in G : xg = gx\}$ von G.
(c) Sind G, H linear und zusammenhängend und ist $d\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ein Isomorphismus, so ist φ surjektiv und es gilt $\dim G = \dim H$.

Aufgabe 2.5

Aus der Vorlesung kennen Sie den folgenden allgemeinen Sachverhalt: Sei G eine lineare algebraische Gruppe und $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$. Für $\chi\colon G \to G$, $x \mapsto (\sigma x)x^{-1}$ gilt dann $d\chi_1 = d\sigma_1 - 1$. Rechnen Sie dies explizit nach für: $G = \mathbf{GL}_2$ und $\sigma(x) = (x^{-1})^{\mathrm{tr}}$, $x \in G$.