Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Sommersemester 2016

# Darstellungstheorie reduktiver Gruppen – Blatt 9

Abgabe der Lösungen am 15.06.2016 in der Vorlesung

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 9.2 und 9.3 ab, die übrigen Aufgaben bereiten Sie eigenständig für die Übungsstunde vor; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenII_SS16/`.

Alle Varietäten seien über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k$ definiert.

**Aufgabe 9.1**

Sei $G$ eine zusammenhängende lineare algebraische Gruppe, und sei $x \in G$ mit Jordanzerlegung $x = x_{\mathrm{s}} x_{\mathrm{u}}$. Zeigen Sie: $x \in \mathrm{C}_G(x_{\mathrm{s}})^\circ$.

**Aufgabe 9.2** (8 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Verifizieren Sie durch eine explizite Rechnung, daß die Gruppe $G = \mathbf{GL}_n$ reduktiv ist und bestimmen Sie das Radikal $R(G)$ sowie die Kommutatorgruppe $[G, G]$. Zeigen Sie weiter: (i) $R(G)$ ist ein zentraler Torus, (ii) $[G, G]$ ist halbeinfach, (iii) $G = R(G).[G, G]$ und (iv) $R(G) \cap [G, G]$ ist endlich.

(*Bemerkung*: Man nennt $G$ ein *fast-direktes Produkt* von $R(G)$ und $[G, G]$.)

**Aufgabe 9.3** (8 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $G = \mathbf{GL}_n$. Sei $B \leq G$ die Borelsche Untergruppe der inverierbaren oberen Dreiecksmatrizen, und $W \leq G$ die Untergruppe aller Permutationsmatrizen.

(a) Zeigen Sie durch eine direkte Rechnung, daß $G$ die disjunkte Vereinigung der Doppelnebenklassen $BwB$, $w \in W$, ist. (Diese Zerlegung heißt *Bruhat-Zerlegung* von $G$.)

(b) Für $0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_d = n$, mit $d \in \mathbb{N}$, bezeichne $P_{n_1,\ldots,n_d}$ die Untergruppe von $G$, die aus allen invertierbaren Block-Matrizen der Gestalt

$$\begin{bmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & A_d \end{bmatrix}, \qquad \text{mit } A_i \in \mathbf{GL}_{n_i - n_{i-1}} \text{ für } i \in \{1, \ldots, d\},$$

besteht. Zeigen Sie: $P_{n_1,\ldots,n_d}$ ist eine parabolische Untergruppe von $G$.

(c) Beweisen Sie, daß jede parabolische Untergruppe von $G$ zu genau einer der Gruppen $P_{n_1,\ldots,n_d}$ aus (b) konjugiert ist. (Bearbeiten Sie ggf. zunächst den Spezialfall $n = 3$!)

(*Hinweis zu* (c): Die Gruppe $G$ operiert auf dem Standard-Vektorraum $V = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$. Sei $B \leq P \leq G$. Überprüfen Sie zunächst: Die einzigen $B$-invarianten Untervektorräume sind die Räume $V_i = \langle e_1, \ldots, e_i \rangle$. Wähle $0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_d = n$ dergestalt, daß die $V_{n_i}$ genau die $P$-invarianten Unterräume sind, und beachte: $\langle g.e_1 \mid g \in P \rangle = V_{n_1}$. Folglich exisitiert $g \in P$, so daß die $n_1$-ste Koordinate von $g.e_1$, d.h. der $n_1$-ste Eintrag in der ersten Spalte der Matrix $g$, ungleich 0 ist. Gemäß der Bruhat-Zerlegung ist dann $g \in BwB$, und folglich $w \in P$, für eine Permutationsmatrix $w$ mit $w.e_1 = e_{n_1}$. Verwenden Sie nun $w$ und die in $B$ enthaltenen Elementarmatrizen, um zu zeigen, daß zahlreiche neue Elementarmatrizen in $P$ liegen. Argumentieren Sie anschließend per Induktion.)