Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Sommersemester 2016

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Darstellungstheorie reduktiver Gruppen – Blatt 10

Abgabe der Lösungen am 22.06.2016 in der Vorlesung

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu beiden Aufgaben 10.1 und 10.2 ab; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenII_SS16/`.

Alle Varietäten seien über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k definiert.

Aufgabe 10.1 (6 Punkte)

Sei $\ell \in \mathbb{N}$, und $V = \mathbb{R}^\ell$ ein reeller Vektorraum. Bezeichne mit $V^\vee$ den Dualraum zu V, und mit $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V^\vee \to \mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle = y(x)$ die natürliche Paarung.
Ein *Wurzelsystem* vom Rang ℓ ist eine Teilmenge $R \subseteq V$ mit den Eigenschaften:

- R ist ein endliches Erzeugendensystem für V; weiter ist $0 \notin R$.
- Ist $\alpha \in R$, so existiert $\alpha^\vee \in V^\vee$ mit $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$, und $s_\alpha(R) = R$ für den linearen Isomorphismus $s_\alpha : V \to V$, $s_\alpha(x) = x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha$.
- Für $\alpha \in R$ ist $\alpha^\vee(R) \subseteq \mathbb{Z}$.

(a) Sei R ein Wurzelsystem, und seien $\alpha \in R$ und $c \in \mathbb{R}$ mit $c\alpha \in R$. Zeigen Sie: Dann folgt bereits $c \in \{\pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2\}$.

(*Bemerkung*: Ein Wurzelsystem R heißt *reduziert*, falls $\pm\alpha$ jeweils die einzigen Vielfachen von $\alpha \in R$ sind, die ebenfalls in R liegen.)

(b) Finden Sie vier wesentlich verschiedene reduzierte Wurzelsysteme vom Rang 2, d. h. Wurzelsysteme vom Rang 2, die sich nicht durch lineare Isomorphismen von V in sich in einander überführen lassen.

(c) Die *Weylgruppe* $W(R)$ eines Wurzelsystems R ist die von den Spiegelungen s_α, $\alpha \in R$, erzeugte Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$. Bestimmen Sie die Weylgruppen der in (b) gefundenen reduzierten Wurzelsysteme vom Rang 2.

Aufgabe 10.2 (6 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $G = \mathbf{GL}_n$ sowie $T = \mathbf{D}_n$ der Standardtorus.

(a) Bestimmen Sie die Menge P aller nicht-trivialen Gewichte von T bzgl. der (eingeschränkten) adjungierten Operation auf $\mathfrak{gl}_n$. Berechnen Sie für $\alpha \in P$ den Zentralisator $G_\alpha = \mathrm{C}_G(\mathrm{Kern}(\alpha)^\circ)$ und bestimmen Sie die Teilmenge P' aller $\alpha \in P$, so daß G_α nicht auflösbar ist.

(b) Geben Sie einen natürlichen Isomorphismus zwischen der Weylgruppe $W(G,T)$ und $\mathrm{Sym}(n)$ an. Bestimmen Sie für $\alpha \in P'$ jeweils $W_\alpha = W(G_\alpha, T) = \{1, s_\alpha\}$, und geben Sie das s_α entsprechende Element in $\mathrm{Sym}(n)$ an.

(c) Verifizieren Sie direkt, daß $W = \langle s_\alpha \mid \alpha \in P' \rangle$ ist.