Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Sommersemester 2016

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Darstellungstheorie reduktiver Gruppen – Blatt 11

Abgabe der Lösungen am 29.06.2016 in der Vorlesung

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu beiden Aufgaben 11.1 und 11.2 ab, die übrigen Aufgaben bereiten Sie eigenständig für die Übungsstunde vor; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenII_SS16/`.

Alle Varietäten seien über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k definiert.

Aufgabe 11.1 (8 Punkte)

Ein *Wurzeldatum* $\Psi = (X, R, X^\vee, R^\vee)$ besteht aus

(i) freien abelschen Gruppen $X, X^\vee$ von endlichem Rang und einer bi-additive Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X^\vee \to \mathbb{Z}$, die Isomorphismen $X \to \mathrm{Hom}(X^\vee, \mathbb{Z})$ und $X^\vee \to \mathrm{Hom}(X, \mathbb{Z})$ induziert,

(ii) endlichen Teilmengen $R \subseteq X$ und $R^\vee \subseteq X^\vee$, die durch eine Bijektion $R \to R^\vee$, $\alpha \mapsto \alpha^\vee$ miteinander in Verbindung stehen.

Die Elemente von R heißen *Wurzeln*, diejenigen von $R^\vee$ *Co-Wurzeln*.
Für $\alpha \in R$ betrachten wir die Endomorphismen

$$s_\alpha : X \to X, \quad s_\alpha(x) = x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha \qquad \text{und} \qquad s_{\alpha^\vee} : X^\vee \to X^\vee, \quad s_{\alpha^\vee}(y) = y - \langle \alpha, y \rangle \alpha^\vee.$$

Schließlich sollen die folgenden Axiome erfüllt sein:

- Für jedes $\alpha \in R$ gilt $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$.
- Für jedes $\alpha \in R$ ist $s_\alpha(R) = R$ und $s_{\alpha^\vee}(R^\vee) = R^\vee$.

Das Wurzeldatum Ψ heißt *reduziert*, falls zusätzlich aus $\alpha \in R$ stets $2\alpha \notin R$ folgt.

(a) Zeigen Sie: Für $\alpha \in R$ gilt $s_\alpha^2 = \mathrm{id}$ und $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$.

Die *Weylgruppe* $W = W(\Psi)$ ist die von s_α, $\alpha \in R$, erzeugte Untergruppe von $\mathrm{Aut}(X)$.

(b) Erläutern Sie, wieso das sogenannte *duale Wurzeldatum* $\Psi^\vee = (X^\vee, R^\vee, X, R)$ mit den entsprechenden Abbildungen ebenfalls ein Wurzeldatum darstellt.

(c) Sei Q die von R erzeugte Untergruppe von X und $V = \mathbb{R} \otimes Q$. Zeigen Sie: Ist $R \neq \varnothing$, so ist $R \subseteq V$ ein Wurzelsystem (siehe Aufgabenblatt 10) und $W = W(\Psi) \cong W(R)$.

(d) Bestimmen Sie (bis auf Isomorphie) alle Wurzeldaten $\Psi = (X, R, X^\vee, R^\vee)$ mit $X \cong X^\vee \cong \mathbb{Z}$. Welche dieser Wurzeldaten sind reduziert?

(e) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $X = \mathbb{Z}^n$, mit $\mathbb{Z}$-Standardbasis $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, und $R = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j\}$. Zeigen Sie, daß sich diese Vorgaben zu einem Wurzeldatum $\Psi = (X, R, X^\vee, R^\vee)$ ergänzen lassen und bestimmen Sie die zugehörige Weylgruppe $W = W(\Psi)$.

Aufgabe 11.2 (4 Punkte)

Sei G eine zusammenhängende unipotente lineare algebraische Gruppe, und sei H eine zusammenhängende abgeschlossene echte Untergruppe von G.
Zeigen Sie: $\dim \mathrm{N}_G(H) > \dim H$.

(*Hinweis*: Betrachten Sie die Untergruppe $Z(G).H$.)

Bitte wenden!

Aufgabe 11.3

Sei $G = \mathbf{Sp}_4$ sowie $T = \mathbf{D}_4 \cap G$ der Standardtorus; vgl. Aufgabe 6.2.

(a) Bestimmen Sie die Menge P aller nicht-trivialen Gewichte von T bzgl. der (eingeschränkten) adjungierten Operation auf $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{sp}_4$. Berechnen Sie für $\alpha \in P$ den Zentralisator $G_\alpha = \mathrm{C}_G(\mathrm{Kern}(\alpha)^\circ)$ und bestimmen Sie die Teilmenge P' aller $\alpha \in P$, so daß G_α nicht auflösbar ist.

(b) Bestimmen Sie die Weylgruppe $W(G, T)$.

(c) Verallgemeinern Sie Ihre Ergebnisse, soweit wie möglich, von $\mathbf{Sp}_4$ auf allgemeine symplektische Gruppen $\mathbf{Sp}_{2n}$ vom Rang n.