Klopsch

§5 Endlich erzeugte pro-endliche Gruppen und, allgemeiner, pro-endliche Gruppen mit abzählbarer Basis

(5.1) <u>Def</u>: Sei G eine pro-endl Gruppe, und sei $X \subseteq G$.

Gilt eine der folgenden äquiv Bedingungen

- $\langle X \rangle \subseteq_{\text{dicht}} G$, dh $\overline{\langle X \rangle} = G$
- $\forall N \trianglelefteq_{\text{off}} G : \langle X \rangle N = G$,

so heißt X ein (topologisches) <u>Erzeugendensystem</u> von G. [Erinnerung: $\overline{\langle X \rangle} = \bigcap \{ \langle X \rangle N \mid N \trianglelefteq_{\text{off}} G \}$]

Wir nennen die Menge $X \subseteq G$ <u>1-konvergent</u>, falls gilt: $\forall N \trianglelefteq_{\text{off}} G : \quad |X \setminus N| < \infty$.

<u>Bem</u>: Ist $X \subseteq G$ 1-konvergent, so gelten:

- $X \setminus \{1\}$ ist eine diskrete Teilmenge von G.
- Ist X unendl, so ist $\overline{X} = X \cup \{1\}$ die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von $X \setminus \{1\}$.

(5.2) <u>Hilfssatz</u> Sei G eine pro-endl Gruppe. Dann besitzt G ein 1-konvergentes Erzeugendensystem.

Klopsch

<u>Bew</u> : Betrachte $\qquad$ dh, Y ist Verein von M-NKle

$$\mathfrak{M} = \{ (M,Y) \mid M \trianglelefteq_{abg} G,\ M \subseteq Y = YM \subseteq G \text{ mit }$$
$$Y/M = \{ yM \mid y \in Y\} \text{ ist ein 1-konv Ezsyst für } G/M \}.$$

Wegen $(G,G) \in \mathfrak{M}$ ist $\mathfrak{M}$ jedenfalls nicht leer.

Durch die Festlegung

$$(M_1, Y_1) \preccurlyeq (M_2, Y_2) \xleftrightarrow[\text{def}]{} \begin{cases} M_2 \subseteq M_1, \\ Y_1 = Y_2 M_1, \quad (\circ) \\ \forall a \in Y_2 \setminus M_1 : aM_1 \cap Y_2 = aM_2 \quad (\circ\circ) \end{cases}$$

[dh, $aM_1 \cap Y_2$ ist eine <u>einzige</u> M_2-NKle]

wird $\mathfrak{M} = (\mathfrak{M}, \preccurlyeq)$ eine geordnete Menge.

Wir zeigen unten:

(*) Jede nicht-leere Kette $\mathfrak{K} = \{ (K_i, Z_i) \mid i \in I \}$ in $\mathfrak{M}$ besitzt in (K, Z) mit $K = \bigcap \{ K_i \mid i \in I\}$ und

$$Z = \bigcap \{ Z_i \mid i \in I \}$$

eine obere Schranke in $\mathfrak{M}$.

Nach dem Zornschen Lemma finden wir daher ein max Elmt (M, Y) in $\mathfrak{M}$. Es genügt offenbar, zz: $M = 1$; dann ist Y ein 1-konv Ezsystem für G.

<u>Widann</u>: $M \neq 1$. Wähle $N \trianglelefteq_{off} G$ mit $M_2 = N \cap M \subsetneq M$ und wähle ein Repräsentantensystem $S \subseteq_{abg} G$ für M in G mit $1 \in S$; vgl Übbl 5. Setze $Y_2 = (S \cap Y) M_2 \cup M$.

Klopsch

Dann ist $(M_2, Y_2) \in \mathfrak{M}$ und

$(M, Y) \lneq (M_2, Y_2)$. (W)

[<u>dazu</u>: Offenbar ist $M_2 \trianglelefteq_{alg} G$ und $M_2 \subseteq Y_2 = Y_2 M_2 \subseteq G$.

Desweiteren gelten: $M_2 \subseteq M$, $Y = Y_2 M$ und

$\forall a \in Y_2 \setminus M : aM \cap Y_2 = aM_2$ per Konstruktion.

Um zz, daß Y_2/M_2 ein 1-konv Erzsyst für G/M_2 ist,

dürfen wir annehmen, daß $M_2 = 1$ ist, und äquivalent

zeigen: $Y_2 = (S \cap Y) \cup \underbrace{M}_{\text{endl!}}$ ist ein 1-konv Erzsyst für G.

Offenbar gilt $\overline{\langle Y_2 \rangle} = G$, denn $\overline{\langle Y_2 \rangle} \supseteq M$ und

$\overline{\langle Y_2 \rangle M} = \overline{\langle Y \rangle M} = G$.

Sei nun $\mathcal{M} \trianglelefteq_{off} G$. <u>Widannahme</u>: $|Y_2 \setminus \mathcal{M}| = \infty$, folglich

$|(S \cap Y) \setminus \mathcal{M}| = \infty$. Da G kompakt ist, ex dann ein

$\underline{g} \in \overline{(S \cap Y) \setminus \mathcal{M}} \subseteq \underline{S \setminus \mathcal{M}}$ dergestalt, daß jede offene

Umgeb von g unendl viele Elemente aus $S \cap Y$ enthält.

Da Y/M 1-konv in G/M ist, folgt daher $\underline{g} \in M \cap S = \{1\}$. (W)]

<u>Zz bleibt</u> (*): Offenbar gelten $K \trianglelefteq_{alg} G$ und

$K \subseteq Z = ZK \subseteq G$. Zz ist: Z/K ist ein 1-konv Erzsyst

für G/K. OE dürfen wir $K = 1$ annehmen, und

die Beh folgt aus der Beobachtung:

Für jedes $N \trianglelefteq_{off} G$ ex ein $i \in I$ mit $K_i \subseteq N$

und daher gelten:

$$\overline{\langle Z \rangle} N = \overline{\langle Z K_i \rangle} N \overset{(\cdot)}{\supseteq} \overline{\langle Z_i \rangle} K_i = G \quad \text{sowie}$$

$$|Z \setminus N| \underset{(\cdot\cdot)}{\leq} \underbrace{\left| Z_i/K_i \setminus NK_i/K_i \right|}_{<\infty \text{, denn } Z_i/K_i \text{ ist 1-konv in } G/K_i} + \underbrace{|K_i \setminus N|}_{=0} < \infty. \quad //$$

Klopsch

(5.3) Def Sei G eine pro-endl Gruppe.

Wir bezeichnen mit $d(G)$ die minimale Kardinalität eines 1-konvergenten Erzsystems für G, dh die „minimale Erzeugendenzahl".

Ist $d(G) < \infty$, so heißt G endlich erzeugt (als pro-endl Gruppe).

(5.4) Lemma Sei G eine pro-endl Gruppe.

(1) Sei $G = \langle x_1, \ldots, x_d \rangle$ für $d = d(G) < \infty$.

Dann gilt für $m \in \mathbb{N}$:

$$\# \{ H \leq_{\text{off}} G \mid |G:H| = m \} \leq m \cdot (m!)^d .$$

Insb besitzt G nur abzählbar viele offene Untergruppen und somit eine abzählbare Basis (für die zugrunde liegende Topologie).

(2) Besitzt G ein abzählbares 1-konvergentes Erzeugendensystem, so hat G nur abzählbar viele offene Untergruppen und somit eine abzählbare Basis.

Bew (1) Sei $H \leq_{\text{off}} G$ mit $|G:H| = m$.

Dann operiert G per Rechtsmultipl auf $H\backslash G = \{ Hg \mid g \in G \}$; wir erhalten einen stetigen Homom $G \longrightarrow \mathrm{Sym}(m)$ [auf eine transitive Permutationsgruppe]. Klopsch

Die Gruppe H ist eine von m zugehörigen „Punktstabilisatoren". Insgesamt ist H daher eine von höchstens

$$|\mathrm{Hom}_{\mathrm{stetig}}(G, \mathrm{Sym}(m))| \cdot m \leq (m!)^d \cdot m$$

offenen Untergr. vom Index m.

(2) Sei $X = \{ x_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ ein 1-konvergentes Erzsyst für G. Für $m \in \mathbb{N}$ setze

$$K_m = \overline{\langle g^{-1} x_n g \mid g \in G, n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq m \rangle} \trianglelefteq_{\mathrm{abg}} G;$$

dann ist G/K_m endl erz und besitzt nach (1) nur abz viele offene Untergr.

Da X 1-konvergent ist, gibt es zu jedem $H \leq_{\mathrm{off}} G$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$K_m \subseteq \underbrace{\bigcap \{ H^g \mid g \in G \}}_{\trianglelefteq_{\mathrm{off}} G} \subseteq H.$$

Folglich ist

$$\{ H \mid H \leq_{\mathrm{off}} G \} = \bigcup_{m \geq 1} \underbrace{\{ H \mid K_m \subseteq H \leq_{\mathrm{off}} G \}}_{\text{abz bar, da}}$$

abzählbar. //

$$\begin{array}{ccc} G & & G/K_m \\ H & \xleftrightarrow{1-1} & H/K_m \\ K_m & & 1 \end{array}$$

Klopsch

(5.5) <u>Satz</u> Sei G eine pro-endl Gruppe.

Dann sind äquivalent:

(i) G besitzt eine <u>abzbare</u> Basis (für die Top).

(ii) G hat (nur) <u>abzbar</u> viele offene Normalteiler.

(iii) G hat (nur) <u>abzbar</u> viele offene Untergruppen.

(iv) G besitzt eine abst Kette

$$G = N_0 \geqslant N_1 \geqslant \ldots \quad \text{von offenen Normalteilern}$$

$$N_i \trianglelefteq_{\text{off}} G, \quad \underline{i \in \mathbb{N}_0},$$

die eine Umgebungsbasis für 1 bilden.

(v) $G \cong \varprojlim_{i \in \mathbb{N}} G_i$ ist der inverse Limes

eines inversen Systems von endl Gruppen G_i

über der gerichteten Menge $\underline{(\mathbb{N}, \leq)}$.

(vi) G besitzt ein <u>abzbares</u> 1-konv Erzsyst.

<u>Bew skizze</u>:

$$\begin{tikzcd}
(i) \arrow[r, leftrightarrow, "(1.12)"] & (ii) \arrow[d, "(\cdot)"'] & (iii) \arrow[l, "\checkmark"'] \\
(v) \arrow[r, leftrightarrow, "(2.19)"'] & (iv) \arrow[r, "(\cdot\,\cdot)"] & (vi) \arrow[u, "(5.4)"']
\end{tikzcd}$$

<u>zu</u> $(\cdot)$: Sind $M_0, M_1, M_2, \ldots$ alle offenen Normalteiler

von G, so bilden

$$N_i = M_0 \cap M_1 \cap \ldots \cap M_i \trianglelefteq_{\text{off}} G, \quad i \in \mathbb{N}_0$$

eine geeignete Kette.

zu (∘∘): Sei $G = N_0 \geq N_1 \geq \ldots$ mit

$N_i \trianglelefteq_{\text{off}} G$, $i \in \mathbb{N}_0$, eine Umgeb-basis für 1.

Für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ ist N_i / N_{i+1} endl, und wir finden eine endl Menge $X_i \subseteq N_i$ mit $N_i = \langle X_i \rangle N_{i+1}$. Dann ist

$$X = \bigcup \{ X_i \mid i \in \mathbb{N}_0 \}$$

ein abzb 1-konvergentes Erzsyst für G. //

(5.6) Satz Jede pro-endl Gruppe mit abzbarer Basis (für die zugeh Top) läßt sich als abgeschl Untergruppe in eine 2-erzeugte pro-endl Gruppe, z.B. in

$$\prod_{n \geq 5} \mathrm{Alt}(n) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}_{\geq 5}} (\mathrm{Alt}(5) \times \mathrm{Alt}(6) \times \ldots \times \mathrm{Alt}(n)),$$

einbetten. 13

14

Bem (1) Allgemeiner gilt sogar (Lubotzky & Wilson 1984):

Ist $\mathfrak{K}$ eine Klasse von endl Gruppen, die unter der Bildung von Untergruppen und Erweiterungen abgeschlossen ist, so ex eine 2-erzeugte pro-$\mathfrak{K}$-Gruppe, in die sich jede pro-$\mathfrak{K}$-Gruppe mit abzb

Basis einbetten läßt.

(2) Klassisch gilt für abstrakte Gruppen nach Higman-Neumann-Neumann (1949):
Jede abzählbare Gruppe läßt sich in eine 2-erzeugte Gruppe einbetten, aber es gibt keine „universelle" 2-erzeugte Gruppe, die alle abzb Gruppen (bis auf Isom) als Unt'gruppen enthält.

<u>Bew (Skizze)</u>: Sei G eine pro-endl Gruppe mit abzbarer Basis. Gemäß (5.5) finden wir $G = N_0 \geq N_1 \geq \ldots$ mit $N_i \trianglelefteq_{oA} G$, $i \in \mathbb{N}_0$, und $\bigcap \{ N_i \mid i \in \mathbb{N}_0 \} = 1$. Wir setzen $m_i = |G : N_i| \in \mathbb{N}$ für $i \in \mathbb{N}_0$; dann gilt

$$G/N_i \underset{\text{Cayley}}{\hookrightarrow} \mathrm{Sym}(m_i) \overset{(\cdot)}{\hookrightarrow} \mathrm{Alt}(m_i+2) \hookrightarrow \mathrm{Alt}(m)$$

für alle $m \geq m_i + 2$.

<u>zu $(\cdot)$</u>: Nutze

z.B.
$$\mathrm{Sym}(m_i) \longrightarrow \mathrm{Alt}(m_i+2)$$
$$\sigma \longmapsto \begin{cases} \sigma \cdot (m_i+1)(m_i+2) & \sigma \in \mathrm{Alt}(m_i) \\ \sigma \cdot (m_i+1 \;\; m_i+2) & \sigma \notin \mathrm{Alt}(m_i) \end{cases}$$

Folglich existiert eine streng anwachsende Folge $(n_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ mit $G/N_i \hookrightarrow \mathrm{Alt}(n_i)$ und $5 \leq n_1$.

Das ergibt

$$G \cong \varprojlim_{i\in\mathbb{N}} G/N_i \hookrightarrow \prod_{i\in\mathbb{N}} G/N_i \hookrightarrow \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Alt}(n_i)$$

$$\hookrightarrow \prod_{n\geq 5} \mathrm{Alt}(n),$$

jeweils als abgeschl. Untergruppe.

Es bleibt zu zeigen:

$\prod_{n\geq 5} \mathrm{Alt}(n)$ ist 2-erzeugt. [vgl. Übaufg. 3.5]

Zunächst beobachten wir für jedes einzelne $n\in\mathbb{N}_{\geq 3}$:

$$\mathrm{Alt}(n) = \langle \pi_n, \rho_n \rangle, \quad \text{wobei} \quad \rho_n = (1\ 2\ 3)$$

$$\text{und} \quad \pi_n = \begin{cases} (1\ 2\ \cdots\ n) & n \equiv_2 1, \\ (2\ 3\ \cdots\ n) & n \equiv_2 0. \end{cases}$$

[Induktion nach n:

IA: $n=3$. $\mathrm{Alt}(3) = \langle (1\ 2\ 3) \rangle$ ✓

IS: $n>3$. Für $n \equiv_2 1$ gilt

$$(2\ 3\ \cdots\ n-1) = (1\ 2\ \cdots\ n)(1\ n\ 2)$$

und

$$(1\ n\ 2) = (n\ 1\ 2)^{-1} = \left[(1\ 2\ 3)^{(1\ 2\ \cdots\ n)^{-1}} \right]^{-1},$$

also $\pi_{n-1}, \rho_{n-1} \in \langle \pi_n, \rho_n \rangle$. Wegen $\pi_n \in \langle \pi_n, \rho_n \rangle$ ist $\langle \pi_n, \rho_n \rangle$ zudem transitiv. Das ergibt per Induktion $\langle \pi_n, \rho_n \rangle = \mathrm{Alt}(n)$.

Kasprich

Für $n \underset{2}{\equiv} 0$ verwenden wir

$$(1\ 2 \cdots n-1) = (2\ 3 \cdots n)(n\ 1\ 2)$$

und

$$(n\ 1\ 2) = (1\ n\ 2)^{-1} = \left[(1\ 2\ 3)^{(2\ 3 \cdots n)^{-1}}\right]^{-1},$$

um ganz ähnlich zu argumentieren.] .

Etwas allgemeiner als erforderlich zeigen wir nun:

⊛ Sind $S_1 = \langle x_1, y_1 \rangle$, $S_2 = \langle x_2, y_2 \rangle$, ...

pw nicht-isomorphe, jeweils 2-erzeugte einfache endl Gruppen, so gilt

$$\prod_{i=1}^{\infty} S_i = \overline{\langle x, y \rangle}$$

$$\text{für} \quad x = (x_1, x_2, \dots)$$
$$y = (y_1, y_2, \dots).$$

denn: Es genügt, zz: Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\prod_{i=1}^{n} S_i = \langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle =: H.$$

Per Konstr bildet H surjektiv auf jeden Faktor S_i ab, somit besitzt H wenigstens einen Kompositionsfaktor isom zu S_i.

Das ergibt

$$|H| \geq \prod_{i=1}^{n} |S_i| = \left|\prod_{i=1}^{n} S_i\right|,$$

also $H = \prod_{i=1}^{n} S_i$. //

(5.7) Korollar

Bis auf Isomorphie sind die pro-endl Gruppen mit abzbarer Basis (für die zug Top) genau die abgeschl Untergruppen von

$$\prod_{n \geq 5} \mathrm{Alt}(n).$$

(5.8) Def Die Frattini-Untergruppe $\Phi(G)$ einer pro-endl Gruppe G ist def als

$$\Phi(G) = \begin{cases} \bigcap \{ M \mid M \leq_{\substack{max \\ off}} G \} & G \neq 1, \\ 1 & G = 1; \end{cases}$$

hierbei ist $M \leq_{\substack{max \\ off}} G$ maximal offen, falls

$M \leq_{off} G$, $M \lneq G$ und

$\forall H : M \lneq H \underset{(off)}{\leq} G \rightarrow H = G$.

Wir nennen $G/\Phi(G)$ die Faktor frattini gruppe von G.

Ein Elmt $g \in G$ heißt erzeugendenuntauglich (oder Nichterzeuger), falls für jedes $X \subseteq G$ gilt:

Merke: $\Phi(G) \leq_{alg} G$ ist (top) charakteristisch, dh invariant unter allen (stetigen) Autom von G.

$$G = \overline{\langle X \cup \{g\} \rangle} \leftrightarrow G = \overline{\langle X \rangle}.$$

Bem Im Gegensatz zu abstrakten unendl Gruppen gilt für pro endl Gruppen $G \neq 1$ stets $\Phi(G) \lneq G$.

Klopsch

(5.9) Lemma Sei G eine pro-endl. Gruppe. Dann gilt:

$$\Phi(G) = \{ g \in G \mid g \text{ erzeugt für } G \}.$$

Bew: Für $G = 1$ ist die Beh erfüllt; sei nun $G \neq 1$ und $g \in G$.

Sei zunächst g erzeugt für G. Für $M \leq_{\substack{max\\ off}} G$ mit $g \notin M$ ergäbe sich dann

$$G = \overline{\langle M \cup \{g\} \rangle} = \overline{\langle M \rangle} = M. \text{ W}$$

Also gilt $g \in \Phi(G)$.

Sei nun g nicht erzeugt für G. Dann finden wir $X \subseteq G$ mit $G = \overline{\langle X \cup \{g\} \rangle} \supsetneq \overline{\langle X \rangle}$.

Wegen $\overline{\langle X \rangle} = \bigcap \{ H \mid \overline{\langle X \rangle} \leq H \leq_{off} G \}$ ex $M \leq_{off} G$ mit $\overline{\langle X \rangle} \leq M$ und $g \notin M$; wir wählen zudem M maximal mit diesen Eigenschaften. Dann gilt bereits $M \leq_{\substack{max\\ off}} G$, denn $g \notin M$ impliziert $M \lneq G$ und für $M \lneq H \leq_{off} G$ gilt stets $g \in H$, also $X \cup \{g\} \subseteq H$ und daher $H = G$.

Aus $g \notin M$ folgt nun $g \notin \Phi(G)$. //

(5.10) <u>Satz</u>

Sei G eine pro-endl. Gruppe. Dann gelten:

(1) Ist $H \leq_{\text{abg}} G$ mit $H\,\Phi(G) = G$,
so folgt bereits $H = G$.

(2) Für $K \trianglelefteq_{\text{abg}} G$ ist $\Phi(G)K/_K \subseteq \Phi(G/K)$.
[äquivalent: Für jeden surj stetigen Homom $\pi : G \to H$ von G auf eine pro-endl. Gruppe H gilt $\Phi(G)\pi \subseteq \Phi(H)$.]

(3) Sind $K \trianglelefteq_{\text{abg}} G$ und $H \leq_{\text{abg}} G$ mit $K \subseteq \Phi(H)$, so folgt $K \subseteq \Phi(G)$.

(4) Ist $\Phi(G) \subseteq K \trianglelefteq_{\text{abg}} G$ und $K/\Phi(G)$ pro nilpotent, so ist bereits K pronilpotent.
Insbesondere ist $\Phi(G)$ pronilpotent. [$K = \Phi(G)$]

(5) G ist pronilpotent $\iff$ $G/\Phi(G)$ abelsch ist.

<u>Bew</u>: (1) Ist $H \lneq_{\text{abg}} G$ so folgt aus
$H = \bigcap \{ L \mid H \subseteq L \leq_{\text{off}} G \}$: Es ex $M \leq_{\substack{\text{max}\\ \text{off}}} G$ mit $H \subseteq M$, also $H\,\Phi(G) \subseteq M \subsetneq G$.

(2) $\Phi(G)K \subseteq \bigcap \{ M \mid K \subseteq M \leq_{\substack{\text{max}\\ \text{off}}} G \}$

(3) Seien $K \trianglelefteq_{\text{abg}} G$ und $H \leq_{\text{abg}} G$ mit $K \subseteq \Phi(H)$.
<u>Widerspruch</u>: $K \not\subseteq \Phi(G)$.

Kloppenb

Sei also $K \not\subseteq M \leq_{\substack{\max \\ \text{off}}} G$. Dann gilt

$$H = H \cap \underbrace{MK}_{=G} \overset{K \subseteq H}{=} (H \cap M) \underbrace{K}_{\subseteq \Phi(H)} = H \cap M, \text{ also}$$

$K \subseteq H \subseteq M$. (W)

(4) Sei $F \subseteq K \trianglelefteq_{alg} G$ und K/F pronilp

mit der abkürzenden Schreibweise $F = \Phi(G)$.

Sei S eine beliebige Sylowuntergruppe von K.

Gemäß Übaufg 8.4 genügt es, zz: $S \trianglelefteq K$.

Da SF/F eine Sylowuntgr der pronilp Gruppe K/F

ist, gilt nach derselben Übaufg jedenfalls

$SF/F \trianglelefteq_{alg} K/F$; vgl auch (4.10)(1). Gemäß (4.10)(2)

gilt

$$G/F = N_{G/F}(SF/F) \cdot K/F \qquad (\text{„Frattini-Argument"})$$

Das ergibt zusammen $SF/F \trianglelefteq_{alg} G/F$, also

$SF \trianglelefteq_{alg} G$. Da $S \leq_{alg} SF$ offenbar eine

Sylowuntergr ist, liefert (4.10)(2) weiter

$$G = N_G(S) \cdot SF \;=\; N_G(S).$$

$S \subseteq N_G(S)$ & $F = \Phi(G)$ überflüssig nach (1).

Das ergibt wie gewünscht

$S \trianglelefteq G$, insb $S \trianglelefteq K$.

(5) Ist $G/\Phi(G)$ abelsch, so liefert (4)

bereits, daß G pronilp ist. [$K = G$]

14 / 15

Sei umgekehrt G pronilp. Gemäß Übaufg 8.4 gilt dann

$$H \subsetneq N_G(H) \quad \text{für alle} \quad H \lneq_{\text{off}} G.$$

Insb folgt für $M \leq_{\substack{\max \\ \text{off}}} G$ daher

$$M \trianglelefteq_{\text{off}} G, \quad \text{und} \quad G/M \text{ ist zykl } (\cong C_p \text{ für geeign } p \in \mathbb{P}).$$

Insb erhalten wir

$$[G,G] \subseteq \Phi(G),$$

so daß $G/\Phi(G)$ abelsch ist. //

(5.11) Korollar

Sei G eine endl erz pro-endl Gruppe.
Dann gilt $d(G) = d(G/\Phi(G))$.

Bew Offensichtlich ist $d(G) \geq d(G/\Phi(G))$.
Ist umgekehrt $X \subseteq G$ mit

$$|X| = d(G/\Phi(G)) \; [\leq d(G) < \infty] \quad \text{und}$$

$$\overline{\langle X \rangle}\, \Phi(G) = G,$$

so liefert (5.10)(1) bereits $\overline{\langle X \rangle} = G$. //

(5.12) Def / Folg

Für $p \in \mathbb{P}$ ist die p-Frattiniuntergruppe einer pro-endl Gruppe G def als

Klopsch

$$\Phi_p(G) := \bigcap \{ M \mid M = G \text{ oder } M \trianglelefteq_{off} G \text{ mit } G/M \cong C_p \}$$

$$\overset{(*)}{=} \overline{\underbrace{\langle \{ [x,y] \mid x,y \in G \} \cup \{ x^p \mid x \in G \} \rangle}_{} \trianglelefteq_{alg} G}$$

$$= \overline{[G,G]G^p}$$

<u>zu (*):</u> „$\supseteq$" klar „$\subseteq$" Merke:

$$\overline{[G,G]G^p} = \bigcap \{ N \trianglelefteq_{off} G \mid G/N \cong C_p \times \ldots \times C_p \text{ ist elem ab vom Exp } p \}.$$

Sei $N \trianglelefteq_{off} G$ mit $G/N \cong \underbrace{C_p \times \ldots \times C_p}_{r}$

für $r = d(G/N) \in \mathbb{N}_0$. Offenbar gilt dann

$N = G \cap M_1 \cap \ldots \cap M_r$ für geeignete

$M_i \trianglelefteq_{off} G$ mit $G/M_i \cong C_p$, $1 \leq i \leq r$. /

Wir nennen $G/\Phi_p(G)$ kurz die

<u>Faktor-p-Frattinigruppe</u> von G.

(5.13) <u>Lem</u> Sei $p \in \mathbb{P}$ und G eine pro-p-Gruppe. Dann gelten:

- $\forall M \leq_{\substack{max \\ off}} G$: $M \trianglelefteq_{off} G$ mit $G/M \cong C_p$
- $\Phi(G) = \Phi_p(G)$ und folglich ist $G/\Phi(G)$ eine elem ab pro-endl Gruppe vom Exp p.

insb $\mathbb{F}_p$-VR

<u>Bew</u>: Die erste Beh folgt aus der entspr Aussage für endl p-Gruppen; vgl Übaufg 8.4. Die zweite Beh ergibt sich dann direkt aus der Def (5.12) von $\Phi_p(G)$. //

(5.14) <u>Folgerung</u> Sei G eine pro-endl Gruppe, und $p \in \mathbb{P}$. Dann gilt stets $\Phi(G) \subseteq \Phi_p(G)$, und es ist

$$\Phi(G) = \Phi_p(G) \quad \text{gdw} \quad G \text{ eine pro-}p \text{ Gruppe ist.}$$

<u>Bew</u> Nach (5.12) ist $\Phi(G) \subseteq \Phi_p(G)$, und nach (5.13) gilt sogar $\Phi(G) = \Phi_p(G)$, sofern G eine pro-p-Gruppe ist.

Sei nun G keine pro-p Gruppe. Sei $M \leq_{\substack{max \\ off}} G$ eine max offene Untergruppe, die eine pro-p-Sylowuntergr S von G enthält. Wegen $p \nmid |G:M|$ gilt dann $\Phi_p(G) \nsubseteq M$. Aus $\Phi(G) \subseteq M$ folgt dann $\Phi(G) \neq \Phi_p(G)$. //

(5.15) <u>Korollar</u>

Sei G eine pro-p-Gruppe. Dann ist G endl erzeugt gdw $\Phi(G) \leq_{off} G$; in diesem Fall gilt dann

$$G/\Phi(G) \cong C_p^{\,d(G)}$$

(5.16) Hilfssatz Klopsch

Sei G eine endl erz pro-endl Gruppe und $H \leq_{\text{off}} G$. Dann ist H ebenfalls endl erz.

Bem Genauer gilt $d(H) - 1 \leq (d(G)-1)\, |G:H|$.

Bew: Sei X ein endl Erzsyst für G, und sei $T \subseteq G$ ein Repräsentantensystem für die Rechtsnebenkl von H in G, mit $1 \in T$.

Sei $Y = \{ t_1 x t_2^{-1} \mid t_1, t_2 \in T,\ x \in X$ mit $t_1 x t_2^{-1} \in H \}$

und $\tilde{H} = \overline{\langle Y \rangle} \leq_{\text{abg}} H$.

Es genügt, zz: $\tilde{H} T = G$. Dann genügt wiederum:

$$\forall x \in X: \tilde{H} T x \subseteq \tilde{H} T \wedge \underbrace{\tilde{H} T x^{-1} \subseteq \tilde{H} T}$$

hierauf könnten wir sogar verzichten, weil wir pro-endl Gruppen betrachten ...

Seien also $x \in X$, $\tilde{h} \in \tilde{H}$, $t_1 \in T$.

Sei zunächst $t_2 \in T$ mit

$\tilde{h} t_1 x \in H t_2$; dann gilt $\tilde{h} t_1 x t_2^{-1} \in H$,

also $t_1 x t_2^{-1} \in H$, also $t_1 x t_2^{-1} \in Y \subseteq \tilde{H}$,

also $\tilde{h} t_1 x = \tilde{h} (\underbrace{t_1 x t_2^{-1}}_{\in \tilde{H}}) t_2 \in \tilde{H} t_2 \subseteq \tilde{H} T$.

Ähnlich ergibt sich

$\tilde{h} t_1 x^{-1} \in \tilde{H} T$.

[Dieser Bew liefert $d(H) \leq d(G) \cdot |G:H|$.] //

(5.17) <u>Korollar</u>

Sei G eine endl erz pro-p-Gruppe, $p \in \mathbb{P}$.

Dann bildet die (absteigende) <u>Frattinireihe</u>, def durch

$$\Phi_0(G) = G,$$

$$\Phi_i(G) = \Phi(\Phi_{i-1}(G)) \quad \text{für } i \in \mathbb{N},$$

eine Umgebungsbasis

$$G = \Phi_0(G) \underset{\text{off}}{\geq} \Phi_1(G) \underset{\text{off}}{\geq} \Phi_2(G) \geq \ldots$$

für das neutrale Elmt 1.

<u>Bew</u>: Gemäß (5.15) und (5.16) bilden die $\Phi_i(G)$, $i \in \mathbb{N}$, wie angegeben eine absteigende Kette von endl erz offenen Normalteilern von G. Gemäß der Beschreibung der Frattiniuntergruppe einer pro-p-Gruppe als Wortuntergruppe gilt für $N \trianglelefteq_{\text{off}} G$ offenbar

$$\Phi_i(G/N) = \Phi_i(G)N/N \quad \text{für } i \in \mathbb{N}_0.$$

Angewandt auf die endl p-Gruppe G/N liefert (5.15) nun

$$\Phi_i(G/N) = 1 \quad \text{für alle hinreichend großen } i \in \mathbb{N}_0,$$

also $\Phi_i(G) \leq N$ —‖—. //

Klopsch

(5.18) <u>Satz</u> Seien G, H pro endl Gruppen dergestalt, daß

- G für jedes vorgegebene $n \in \mathbb{N}$ nur endl viele offene Normalteiler $N \trianglelefteq_{off} G$ vom Index $|G : N| = n$ besitzt;
- $\{ G/N \mid N \trianglelefteq_{off} G \}$ und $\{ H/M \mid M \trianglelefteq_{off} H \}$ genau die gleichen Isomorphietypen von endl Gruppen enthalten.

Dann gilt bereits $G \cong H$.

<u>Bew</u>: Merke $H \cong \varprojlim_{M \in \mathfrak{M}} H/M$ für die gerichtete Menge $\mathfrak{M} = \{ M \mid M \trianglelefteq_{off} H \}$. Nach Voraussetzung ist für jedes $M \in \mathfrak{M}$ die Menge

$$\mathcal{A}_M = \{ \alpha \mid \alpha : G \twoheadrightarrow H/M \text{ stetiger Epimorphismus} \}$$

nicht leer und zugleich endlich. Offenbar bilden diese Mengen ein inverses System

$$(\mathcal{A}_M, \overline{\varphi}_{MN})_{\mathfrak{M}},$$

wobei die Verbindungsabb $\overline{\varphi}_{MN} : \mathcal{A}_M \to \mathcal{A}_N$ für $M, N \in \mathfrak{M}$ mit $M \subseteq N$ von den entsprechenden kanonischen Projektionen $\varphi_{MN} : H/M \twoheadrightarrow H/N$ induziert werden.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[dr] & H/M \arrow[d] \\ & H/N \end{tikzcd}$$

Klopsch

Gemäß (2.8) ist $\varprojlim_{M\in\mathfrak{M}} \mathcal{A}_M \neq \emptyset$;

sei $(\alpha_M)_{M\in\mathfrak{M}} \in \varprojlim_{M\in\mathfrak{M}} \mathcal{A}_M \; [\subseteq \prod_{M\in\mathfrak{M}} \mathcal{A}_M]$.

Dann bilden die $\alpha_M : G \twoheadrightarrow H/M$, $M\in\mathfrak{M}$,

eine verträgliche Familie von stetigen Homomorphismen.

Folglich ex ein stetiger Homom

$$\alpha : G \to H \quad \text{mit} \quad \alpha\varphi_M = \alpha_M \quad \text{für alle } M\in\mathfrak{M},$$

wobei $\varphi_M : H \to H/M$ die kanon Proj bezeichnet.

Weiter ist $G\alpha = H$; vgl. (2.11).

Insb erfüllt H ähnlich wie G die Bedingung

$$\#\{M \trianglelefteq_{off} H \mid |H:M| = n\} < \infty \quad \text{für jedes } n\in\mathbb{N}.$$

Wir erhalten somit entsprechend einen stetigen

Homom $\beta : H \to G$ mit $H\beta = G$.

Offenbar genügt es nun, zz: $\alpha\beta : G \twoheadrightarrow G$

ist bereits ein Automorphismus. [vgl Übaufg 9.2] 15

16

denn: Widerspruchsann: Es ex $x \in G\setminus\{1\}$ mit

$x\alpha\beta = 1$. Wähle $N \trianglelefteq_{off} G$ mit $x \notin N$.

Dann ist

$$\#\{K \trianglelefteq_{off} G \mid G/K \cong G/N \text{ und } x\in K\}$$

$$\leq \#\{K \trianglelefteq_{off} G \mid G/K \cong G/N\} - 1, \quad \text{denn } x\notin N.$$

Gleichzeitig ist

$$\#\{K \trianglelefteq_{off} G \mid G/K \cong G/N \text{ und } x \in K\}$$

$$\geq \#\{K \trianglelefteq_{off} G \mid G/K \cong G/N\}, \text{ denn } x\beta : G \twoheadrightarrow G$$

mit $x\alpha\beta = 1$.

Da nach Voraussetzung die Anzahlen alle endlich sind, erhalten wir den gewünschten Ⓦ. //

Bspl: Die pro-p-Gruppen

$$G_1 = \prod_{i \in \mathbb{N}} C_{p^i} \quad \text{und} \quad G_2 = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_p$$

haben jeweils eine abzbare Basis (für die zugrunde liegende Top) und besitzen (bis auf Isomorphie) dieselben endl stetigen Bilder.

Dennoch ist $G_1 \not\cong G_2$, da G_1 zahlreiche Elmte endl Ordnung besitzt, G_2 jedoch torsionsfrei ist.

(5.19) Satz (Gaschütz 1956; Roquette)

Seien G, H endl erz pro-endl Gruppen, und sei $n \in \mathbb{N}$ mit $d(G) \leq n$.

Sei $\varphi : G \twoheadrightarrow H$ ein stetiger Epimorphismus und seien $h_1, \ldots, h_n \in H$ mit $H = \overline{\langle h_1, \ldots, h_n \rangle}$.

Dann ex $g_1, \ldots, g_n \in G$ mit

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} : g_i\varphi = h_i$$

und $G = \overline{\langle g_1, \ldots, g_n \rangle}$.

Klopsch

<u>Bew</u>: Sei zunächst G (und damit auch H) endl. Bezeichne mit

$A_G(\underline{h})$, für $\underline{h} = (h_1, \ldots, h_n)$,

die # der $\underline{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in G \times \ldots \times G$

mit $\forall i \in \{1, \ldots, n\}: g_i\varphi = h_i$

und $G = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$.

Offenbar gilt dann

(*) $$A_G(\underline{h}) = |\mathrm{Kern}(\varphi)|^n - \sum_{\substack{L \lneqq G \\ \text{mit } L\varphi = H}} A_L(\underline{h}).$$

$\# \{(g_1, \ldots, g_n) \in G \times \ldots \times G \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\}: g_i\varphi = h_i\}$

Zz ist: $A_G(\underline{h}) \geq 1$. Für manche $\underline{h}$ ist dies sicherlich der Fall: Wegen $d(G) \leq n$ gibt es jedenfalls $g_1, \ldots, g_n \in G$ mit $\langle g_1, \ldots g_n \rangle = G$, und ist $\underline{h} = (g_1\varphi, \ldots, g_n\varphi)$, so gilt tatsächlich $A_G(\underline{h}) \geq 1$. Der „Trick“ besteht nun darin, zz, daß $A_G(\underline{h})$ gar nicht von der speziellen Wahl von $\underline{h}$ abhängt!

Besitzt G beispielsweise gar keine $L \lneqq G$ mit $L\varphi = H$, so gilt stets $A_G(\underline{h}) = |\mathrm{Kern}(\varphi)|^n$; siehe (*).

Allgemein folgt die Aussage gemäß (*) einfach per Induktion nach $|G|$. /

Sei nun G unendl. Setze

$$\mathcal{N} = \{ N \mid N \trianglelefteq_{off} G \}.$$

Zu jedem $N \in \mathcal{N}$ liefert φ einen Epimorphismus

$$\varphi_N : G/N \longrightarrow H/N\varphi = \langle h_1 (N\varphi), \ldots, h_n (N\varphi) \rangle$$

zwischen endl Gruppen; wie bereits gezeigt ist dann

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_N = \{ (g_1 N, \ldots, g_n N) \in (G/N)^n \mid \\ \forall i \in \{1, \ldots, n\} : \ g_i \varphi \equiv_{N\varphi} h_i \\ \text{und } \langle g_1 N, \ldots, g_n N \rangle = G/N \} \neq \emptyset . \end{aligned}$$

Offenbar bildet $(\mathcal{F}_N, \overline{\varphi}_{MN})_{\mathcal{N}}$ ein inverses System nicht-leerer Mengen; gemäß (2.8) ist $\varprojlim_{N \in \mathcal{N}} \mathcal{F}_N \neq \emptyset$, und wir erhalten

$$(g_1, \ldots, g_n) \in G^n \text{ mit } \forall i \in \{1, \ldots, n\} : g_i \varphi = h_i$$
$$\text{und } \overline{\langle g_1, \ldots, g_n \rangle} = G. \quad //$$

<u>Bem</u>: Anwendungen zB in Lubotzkys „Profinite presentations"

(5.20) <u>Def</u> Der (Prüfer-) <u>Rang</u> einer (endl erz) proendl Gruppe G ist def als

$$\operatorname{rg}(G) = \sup \{ \underset{\text{min Erzanzahl}}{d(H)} \mid H \leq_{abg} G \} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}.$$

Klopsch

[„Der Rang von G ist die kleinste Zahl r, so daß jede abgeschl Untergruppe von G von r Elementen erzeugt werden kann."]

<u>Bspl</u>: (1) Ist G eine endl erz abelsche proendl Gruppe, so gilt $rg(G) = d(G)$.

[Übung!] ← bew siehe unten

(2) Die pro-p-Gruppe $C_p \hat{\wr} \mathbb{Z}_p = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} C_p \wr C_{p^n}$

läßt sich von 2 Elmten erzeugen, aber sie hat unendl Rang. [Übung!]

(3) Man kann zeigen: Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ hat

$SL_n(\mathbb{Z}_p)$ endl Rang, aber } [schwieriger]

$SL_n(\mathbb{F}_p[[t]])$ unendl Rang; } [Übung!]

beide Gruppen sind endl erz.

(5.21) <u>Satz</u> Sei G eine proendl Gruppe.

(1) Hat G endl Rang $rg(G) < \infty$, so haben abg Untergruppen und stetige Bilder von G jeweils Rang höchstens $r(G)$.

(2) Für $K \trianglelefteq_{abg} G$ gilt

$$rg(G) \leq rg(G/K) + rg(K);$$

insbes hat G endl Rang, sofern G/K und K jeweils endl Rang besitzen.

Klopsch

(3) Ist $d(G) < \infty$, so gilt

$$d(G) = \max \{ d(G/N) \mid N \trianglelefteq_{\text{off}} G \}.$$

(4) Ist $rg(G) < \infty$, so gilt

$$rg(G) = \max \{ rg(G/N) \mid N \trianglelefteq_{\text{off}} G \}.$$

(5) Es gilt $rg(G) = \sup \{ d(H) \mid H \leq_{\text{off}} G \}$.

<u>Bew</u>: (1) klar [Übung]

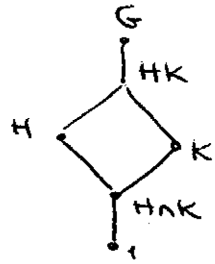
(2) Sei $K \trianglelefteq_{\text{abg}} G$ mit $rg(G/K), rg(K) < \infty$.
Sei $H \leq_{\text{abg}} G$. Dann finden wir $X \subseteq H$ und $Y \subseteq H \cap K$ mit

$$\overline{\langle X \rangle} K = HK \quad \text{und} \quad |X| \leq rg(G/K),$$

$$\overline{\langle Y \rangle} = H \cap K \quad \text{und} \quad |Y| \leq rg(K).$$

Das ergibt $H = \overline{\langle X \cup Y \rangle}$, also

$$d(H) \leq rg(G/K) + rg(K).$$



(3) Sei $d(G) < \infty$. Offenbar gilt

$$d(G) \geq \max \{ d(G/N) \mid N \trianglelefteq_{\text{off}} G \} =: d.$$

Umgekehrt ist für jedes $N \trianglelefteq_{\text{off}} G$ die Menge

$$\mathcal{E}_N = \{ (g_1 N, \dots, g_d N) \mid \langle g_1 N, \dots, g_d N \rangle = G/N \} \neq \emptyset.$$

Offenbar erhalten wir ein inverses System $(\mathcal{E}_N, \overline{\varphi}_{MN})_{N \trianglelefteq_{\text{off}} G}$ von nicht-leeren endl. Mengen;
gemäß (2.8) ist $\varprojlim_{N \trianglelefteq_{\text{off}} G} \mathcal{E}_N \neq \emptyset$, und
wir erhalten $(g_1, \dots, g_d) \in G^d$ mit

$$\overline{\langle g_1, \dots, g_d \rangle} = G.$$

Klopsch

(4) Aus (1) folgt

$$\mathrm{rg}(G) \geq \mathrm{rg}(G/N) \quad \text{für alle } N \trianglelefteq_{\text{off}} G.$$

Sei nun $H \leq_{\text{abg}} G$ mit $d(H) = \mathrm{rg}(G)$.

Gemäß (3) finden wir $M \trianglelefteq_{\text{off}} H$ mit $d(H/M) = d(H)$. Wähle $N \trianglelefteq_{\text{off}} G$ mit $H \cap N \subseteq M$. Dann gilt:

$$\mathrm{rg}(G/N) \geq d(HN/N) = d(H/H\cap N)$$

$$\geq d(H/M) = d(H) = \mathrm{rg}(G).$$

(5) folgt mit (4). //

<u>Bem</u>: Die Theorie der pro-p-Gruppen von endl Rang ist sehr gut entwickelt (~> Vorlesung im WiSe). Bsplsweise sind für eine pro-p-Gruppe pw äquivalent:

- G hat endl Rang
- G hat polynomielles Untergruppenwachstum, dh

$$\# \{ H \leq_{\text{off}} G \mid |G:H| \leq n \} = O(n^c)$$

für geeigneten $c \in \mathbb{R}_{>0}$

- G trägt die Struktur einer p-adischen Liegruppe (und diese ist dann eindeutig)

→ Hilberts 5tes Problem „p-adisch"

- G ist isom zu einer abgeschl Untergruppe von $GL_N(\mathbb{Z}_p)$ für geeign $N \in \mathbb{N}$

[~> Anwendungen für residuell endl Gruppen]

16/17