Klopsch

§ 8 Erste Schritte in der Kohomologietheorie (pro)endl Gruppen

Wir greifen nun die allgemeine Def (7.8) der Kohomologiegruppen über Kokettenkomplexe auf und entwickeln die Theorie weiter.

(8.1) <u>Def</u> Ein <u>verträgliches Paar</u> (ϑ, φ) besteht aus einem stetigen Homom $\vartheta : G_1 \to G_2$ zw proendl Gruppen und einer stetigen Abb $\varphi : A_2 \to A_1$ zw zugeh top Moduln dergestalt, daß gilt:

$$\forall a \in A_2 \ \forall x \in G_1 : \ (a^{x\vartheta})\varphi = (a\varphi)^x .$$

[Bem: Mittels ϑ wird aus dem G_2-Modul A_2 ein G_1-Modul; die Bed besagt dann, daß φ ein G_1-Modul-Homom ist.]

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{\vartheta} & G_2 \\ \circlearrowright & & \circlearrowright \\ A_1 & \xleftarrow[\varphi]{} & A_2 \end{array}$$

Bsple (1) $G_1 = G_2 = G$, $\vartheta = id_G$

$\leadsto$ (id_G, φ) verträglich gdw $\varphi : A_2 \to A_1$ ist ein stetiger G-Modulhomom.

(2) $H = G_1 \leq G_2 = G$, $\vartheta : H \to G$ Inklusionsabb

$\leadsto$ (ϑ, id_A) verträglich für beliebige top G-Moduln $A = A_1 = A_2$.

Klopsch

(3) $G_1 = G$, $G_2 = G/K$ für $K \trianglelefteq_{\text{abg}} G$

und $\vartheta : G \to G/K$ der kan Homom;

$A_1 = A$ ein top G-Modul, $A_2 = A^K = \{a \in A \mid \forall y \in K : a^y = a\}$

als G/K-Modul und

$\varphi : A^K \to A$ die Inkl abb

$\rightsquigarrow$ (ϑ, φ) verträglich

(8.2) <u>Lem</u> Seien $\vartheta : G_1 \to G_2$ und $\varphi : A_2 \to A_1$ ein verträgliches Paar.

(1) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ stellt

$$(\vartheta, \varphi)^*_n : C^n(G_2, A_2) \to C^n(G_1, A_1)$$

$$(x_1, \dots, x_n)[f(\vartheta, \varphi)^*] = [(x_1\vartheta, \dots, x_n\vartheta) f]\varphi$$

für $(x_1, \dots, x_n) \in G_1^{(n)}$,

$f \in C^n(G_2, A_2)$

einen Homomorphismus zw abl Gruppen dar.

(2) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ kommutiert

$$\begin{array}{ccc} C^{n-1}(G_2, A_2) & \xrightarrow{\partial_n} & C^n(G_2, A_2) \\ (\vartheta,\varphi)^*_{n-1} \downarrow & & \downarrow (\vartheta,\varphi)^*_n \\ C^{n-1}(G_1, A_1) & \xrightarrow[\partial_n]{} & C^n(G_1, A_1) \end{array}$$

(3) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ induziert $(\vartheta,\varphi)^*_n$ einen (ebenfalls so bezeichneten) Homom

$$(\vartheta,\varphi)^*_n : H^n(G_2,A_2) \longrightarrow H^n(G_1,A_1)$$

$$f + B^n(G_2,A_2) \mapsto f(\vartheta,\varphi)^*_n + B^n(G_1,A_1).$$

<u>Bew</u> (1) klar.

(2) Wir verifizieren $(\vartheta,\varphi)^*_{n-1}\,\partial_n = \partial_n\,(\vartheta,\varphi)^*_n$ direkt per Rechnung: Für $(x_1,\dots,x_n) \in G_1^{(n)}$, $f \in C^{n-1}(G_2,A_2)$ ist

$$(x_1,\dots,x_n)\,[(f\,(\vartheta,\varphi)^*_{n-1})\,\partial_n]$$

$$= (x_2,\dots,x_n)\,[f\,(\vartheta,\varphi)^*_{n-1}] + \dots + (-1)^n (x_1,\dots,x_{n-1})[f\,(\vartheta,\varphi)^*_{n-1}].x_n$$

$$= [(x_2\vartheta,\dots,x_n\vartheta)\,f]\varphi + \dots + (-1)^n\,[(x_1\vartheta,\dots,x_{n-1}\vartheta)\,f]\,\varphi\,.\,x_n$$

$$= [(x_2\vartheta,\dots,x_n\vartheta)f]\,\varphi + \dots + (-1)^n\,[(x_1\vartheta,\dots,x_{n-1}\vartheta)f.\,(x_n\vartheta)]\,\varphi$$

$$= [\,(x_1\vartheta,\dots,x_n\vartheta)\,(f\partial_n)]\,\varphi$$

$$= (x_1,\dots,x_n)\,[\,(f\,\partial_n)\,(\vartheta,\varphi)^*_n].$$

(3) folgt direkt mit (2) [Übung!]. //

<u>Bem</u>: Für $n=0$ gelten (nach entspr Identifikation)

$$H^0(G_2,A_2) = A_2^{G_2}, \quad H^0(G_1,A_1) = A_1^{G_1}$$

und $(\vartheta,\varphi)^*_0 : A_2^{G_2} \longrightarrow A_1^{G_1}$,

$$a \mapsto a\varphi. \qquad [\text{Einschr von } \varphi]$$

(8.3) <u>Lem</u>

(1) Das verträgliche Paar (id_G, id_A), für eine proendl Gruppe G und einen top G-Modul A, induziert die Identitätsabb $(id_G, id_A)^*_n$ zw $C^n(G,A)$ und sich selbst bzw $H^n(G,A)$ und sich selbst.

(2) Sind (ϑ_1, φ_1) und (ϑ_2, φ_2) verträgl Paare mit

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[r, "\vartheta_1"] \arrow[rr, bend left, ""] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & G_2 \arrow[r, "\vartheta_2"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & G_3 \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] \\
A_1 & A_2 \arrow[l, "\varphi_1"'] & A_3 \arrow[l, "\varphi_2"'] \arrow[ll, bend left, ""]
\end{tikzcd}$$

so ist $(\vartheta_1\vartheta_2, \varphi_2\varphi_1)$ ebenfalls verträgl und für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(\vartheta_1\vartheta_2, \varphi_2\varphi_1)^*_n = (\vartheta_2, \varphi_2)^*_n \, (\vartheta_1, \varphi_1)^*_n .$$

<u>Bew</u> (1) klar

(2) Für $a \in A_3$, $x \in G_1$ gilt:

$$(a^{x\vartheta_1\vartheta_2})\varphi_2\varphi_1 = ((a\varphi_2)^{x\vartheta_1})\varphi_1 = (a\varphi_2\varphi_1)^x ;$$

also ist $(\vartheta_1\vartheta_2, \varphi_2\varphi_1)$ verträglich.

Den Rest belassen wir als (einfache) Übung.

(8.4) Beobachtung / Notation

· Sei G eine proendl Gruppe und $n \in \mathbb{N}_0$.
Sei $\varphi: A \to B$ ein G-Homom zw top G-Moduln. Dann ist (id_G, φ) ein verträgliches Paar. Wir bezeichnen mit φ_n^* bzw φ_n die in (8.2) hergeleiteten Homom $\varphi_n^* = (id_G, \varphi)_n^* : C^n(G,A) \to C^n(G,B)$ und

$$\varphi_n = (id_G, \varphi)_n^* : H^n(G,A) \to H^n(G,B)$$
$$f + B^n(G,A) \to f\varphi + B^n(G,B)$$

Nach (8.3) liefert $H^n(G, \cdot)$ in dieser Weise einen „kovarianten Funktor" von der Kategorie der top G-Moduln in die Kategorie der abelschen Gruppen, dh:

- Für stetige G-Modulhomom
$A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$ ist $(\varphi\psi)_n = \varphi_n \psi_n$.
- Für $\varphi = id_A : A \to A$ ist $\varphi_n = id_{H^n(G,A)}$.

(8.5) Def / Erinnerung

Eine exakte Sequenz von Gruppen, Moduln, ...

$$\dots \to G_{n-1} \xrightarrow{f_n} G_n \xrightarrow{f_{n+1}} G_{n+1} \to \dots$$

liegt vor, wenn die Homomorphismenkette

in jedem Glied G_n exakt ist:

$$\text{Bild}(f_n) = \text{Kern}(f_{n+1}).$$

Eine kurze exakte Sequenz ist eine exakte Sequenz der speziellen Form

(*) $$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 1.$$

Wir nennen eine kurze exakte Sequenz (*) von top Gruppen paßgenau, falls gelten:

- $A \xrightarrow{\varphi} A\varphi\ [\leq B]$ ist ein Homöomorphismus.
- Es gibt eine stetige Abb $\tau : C \to B$ mit $\tau\psi = id_C$ (dh eine stetige Repräsentantenabb).

Bem: Zu diskreten Gruppen bzw proendl Gruppen sind alle kurzen exakten Sequenzen paßgenau. [klar bzw vgl (Übbl 5)].

(8.6) Lem Sei G eine proendl Gruppe, und sei $0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$ eine paßgenaue kurze exakte Sequenz von top G-Moduln. Dann sind, für $n \in \mathbb{N}_0$, die Sequenzen

(i) $$0 \to C^n(G,A) \xrightarrow{\varphi_n^*} C^n(G,B) \xrightarrow{\psi_n^*} C^n(G,C) \to 0$$

(ii) $$H^n(G,A) \xrightarrow{\varphi_n} H^n(G,B) \xrightarrow{\psi_n} H^n(G,C)$$

jeweils exakt.

Klopsch

<u>Bew (Skizze)</u>: Wir überlegen zunächst:

(+) Ist $L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N$ eine exakte Sequenz von top G-Moduln und zusätzlich $\tau : L\alpha \to L$ stetig mit $\tau\alpha = id_{L\alpha}$,

so ist $$C^n(G,L) \xrightarrow{\alpha_n^*} C^n(G,M) \xrightarrow{\beta_n^*} C^n(G,N)$$ exakt.

<u>denn</u>: Offenbar ist $\alpha_n^* \beta_n^* = (\alpha\beta)_n^* = 0$,

also $\text{Bild}(\alpha_n^*) \subseteq \text{Kern}(\beta_n^*)$. Sei $f \in \text{Kern}(\beta_n^*)$.

Dann gilt $f\beta = 0$, also $\text{Bild}(f) \subseteq \text{Kern}(\beta) = \text{Bild}(\alpha)$.

Somit erhalten wir

$$f = f\tau\alpha = (f\tau)\alpha_n^* \in \text{Bild}(\alpha_n^*). /$$

Die Exaktheit von (i) folgt mit (+). [Übung!]

Betrachte nun (ii).

Offenbar gilt $\varphi_n \psi_n = 0$. Sei $f \in Z^n(G,B)$ mit $f + B^n(G,B) \in \text{Kern}(\psi_n)$, d.h. $f\psi_n^* \in B^n(G,C)$.

Schreibe also $f\psi_n^* = \tilde{f}\,\partial_n$ mit $\tilde{f} \in C^{n-1}(G,C)$.

Wegen (i) exakt erhalten wir $\tilde{f} = \tilde{g}\,\psi_{n-1}^*$ für 26

ein $\tilde{g} \in C^{n-1}(G,B)$. Gemäß (8,2)(2) ist 27

dann

$$f\psi_n^* = \tilde{f}\,\partial_n = \tilde{g}\,\psi_{n-1}^*\,\partial_n = \tilde{g}\,\partial_n\,\psi_n^*,$$

also $(f - \tilde{g}\,\partial_n)\psi_n^* = 0$.

Wegen (i) exakt erhalten wir

$$f - \tilde{g}\,\partial_n = h\,\varphi_n^* \quad \text{für ein } h \in C^n(G,A).$$

Dann ist, wieder gemäß (8.2)(2),

$$h\,\partial_{n+1}\,\varphi_{n+1}^* = h\,\varphi_n^*\,\partial_{n+1} = (f - \tilde{g}\,\partial_n)\,\partial_{n+1}$$

$$= \underbrace{f\,\partial_{n+1}}_{=0} - \underbrace{\tilde{g}\,\partial_n\partial_{n+1}}_{=0} = 0.$$

wegen $f \in Z^n(G,B)$

Wegen (i) exakt folgt $h\,\partial_{n+1} = 0$.

Also ist $h + B^n(G,A) \in H^n(G,A)$ und

$$f + B^n(G,B) = (h + B^n(G,A))\,\varphi_n \in \text{Bild}(\varphi_n). \quad //$$

(8.7) <u>Lem</u> Sei G eine proendl Gruppe, und sei $0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$ eine paßgenaue kurze exakte Sequenz von top G-Moduln. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ einen verbindenden Homom $\delta: H^n(G,C) \to H^{n+1}(G,A)$ dergestalt, daß die Sequenz

$$H^n(G,B) \xrightarrow{\psi_n} H^n(G,C) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(G,A) \xrightarrow{\varphi_{n+1}} H^{n+1}(G,B)$$

exakt ist.

<u>Bew</u> Wir verwenden wiederholt (8.2)(2) und die Exaktheit von (i) in (8.6) in den verschiedenen Dimensionen $n-1, n, n+1$.

Sei $\overline{c_n} = c_n + B^n(G,C)$, und schreibe

$c_n = b_n \psi_n^*$ für $b_n \in C^n(G,B)$. Dann gilt

$$0 = c_n \partial_{n+1} = b_n \psi_n^* \partial_{n+1} = b_n \partial_{n+1} \psi_{n+1}^*,$$

folglich $b_n \partial_{n+1} = a_{n+1} \varphi_{n+1}^*$ für $a_{n+1} \in C^{n+1}(G,A)$.

Wegen

$$a_{n+1} \partial_{n+2} \varphi_{n+2}^* = a_{n+1} \varphi_{n+1}^* \partial_{n+2} = b_n \partial_{n+1} \partial_{n+2} = 0$$

ist $a_{n+1} \partial_{n+2} = 0$; definiere

(*) $$\overline{c_n}\, \delta = \overline{a_{n+1}} = a_{n+1} + B^{n+1}(G,A) \in H^{n+1}(G,A).$$

[Prüfe die Unabh. von den speziell getroffenen Wahlen: $\overline{c_n} = \tilde{c}_n + B^n(G,C)$,

$$\tilde{c}_n = \tilde{b}_n \psi_n^*,$$

$$\tilde{b}_n \partial_{n+1} = \tilde{a}_{n+1} \varphi_{n+1}^*.$$

Dann gilt $\tilde{c}_n - c_n = c_{n-1} \partial_n$ für $c_{n-1} \in C^{n-1}(G,C)$,

und $c_{n-1} = b_{n-1} \psi_{n-1}^*$ für $b_{n-1} \in C^{n-1}(G,B)$.

Das ergibt

$$(\tilde{b}_n - b_n)\psi_n^* = \tilde{c}_n - c_n = c_{n-1}\partial_n = b_{n-1}\psi_{n-1}^* \partial_n$$

$$= b_{n-1} \partial_n \psi_n^*,$$

also $\tilde{b}_n - b_n - b_{n-1}\partial_n \in \mathrm{Kern}(\psi_n^*) = \mathrm{Bild}(\varphi_n^*)$,

also $\tilde{b}_n - b_n - b_{n-1}\partial_n = a_n \varphi_n^*$.

Dann gilt

$$(\tilde{a}_{n+1} - a_{n+1})\varphi_{n+1}^* = (\tilde{b}_n - b_n)\partial_{n+1}$$

$$= a_n \varphi_n^* \partial_{n+1} = a_n \partial_{n+1} \varphi_{n+1}^*,$$

also $\tilde{a}_{n+1} - a_{n+1} = a_n \partial_{n+1}$ und somit

$$\overline{\tilde{a}_{n+1}} = \overline{a_{n+1}} \quad \text{in} \quad H^{n+1}(G,A). \;/\;]$$

Per Konstruktion ist δ ein Homom.

Zz bleiben: (·) $\text{Bild}(\psi_n) = \text{Kern}(\delta)$ und

(··) $\text{Bild}(\delta) = \text{Kern}(\varphi_{n+1})$.

(·) Sei zunächst $\overline{c_n} \in \text{Bild}(\psi_n)$, wobei also $c_n = b_n \psi_n^*$ mit $b_n \in Z^n(G,B)$ gelte.

Dann ist $b_n \partial_{n+1} = 0$, und in der Def ⊛ dürfen wir $a_{n+1} = 0$ wählen.

Sei nun $\overline{c_n} \in \text{Kern}(\delta)$. Konstruiere b_n, a_{n+1} wie oben; dann ist $a_{n+1} \in B^{n+1}(G,A)$, also $a_{n+1} = a_n \partial_{n+1}$ für $a_n \in C^n(G,A)$. Wir erhalten

$$b_n \partial_{n+1} = a_{n+1}\varphi_{n+1}^* = a_n \partial_{n+1} \varphi_{n+1}^* = a_n \varphi_n^* \partial_{n+1},$$

also $b_n - a_n \varphi_n^* \in Z^n(G,B)$.

Weiter gilt $(b_n - a_n\varphi_n^*)\psi_n^* = b_n \psi_n^* = c_n$.

Somit ist $\overline{c_n} = c_n + B^n(G,C)$

$$= (b_n - a_n\varphi_n^*)\psi_n^* + B^n(G,C) = (b_n - a_n\varphi_n^* + B^n(G,B))\psi_n \in \text{Bild}(\psi_n)$$

Klopsch

(ii) Sind $\overline{c}_n \in H^n(G,C)$ und

c_n, b_n, a_{n+1} wie in der Konstruktion von δ,

so ist
$$\overline{c}_n \delta \varphi_{n+1} = a_{n+1}\varphi^*_{n+1} + B^{n+1}(G,B)$$
$$= b_n \partial_{n+1} + B^{n+1}(G,B)$$
$$= 0 + B^{n+1}(G,B) \text{ in } H^{n+1}(G,B).$$

Also gilt $\mathrm{Bild}(\delta) \subseteq \mathrm{Kern}(\varphi_{n+1})$.

Sei nun $\overline{u}_{n+1} \in \mathrm{Kern}(\varphi_{n+1})$, für

$\overline{u}_{n+1} = u_{n+1} + B^{n+1}(G,A) \in H^{n+1}(G,A)$. Dann

gilt $u_{n+1}\varphi^*_{n+1} \in B^{n+1}(G,B)$, also $u_{n+1}\varphi^*_{n+1} = v_n \partial_{n+1}$

für $v_n \in C^n(G,B)$. Wir erhalten

$$\overline{u}_{n+1} = (v_n \psi^*_n + B^n(G,C))\delta \in \mathrm{Bild}(\delta). \quad //$$

(8.8) <u>Satz</u> Sei G eine proendl Gruppe, und sei

$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$ eine paßgenaue

kurze exakte Sequenz von top G-Moduln.

Dann gibt es eine zugehörige <u>lange exakte</u>

<u>Sequenz</u> von Kohomologiegruppen

$$0 \longrightarrow A^G \xrightarrow{\varphi_0} B^G \xrightarrow{\psi_0} C^G \xrightarrow{\delta} H^1(G,A) \xrightarrow{\varphi_1} \dots$$
$$\dots \xrightarrow{\varphi_n} H^n(G,B) \xrightarrow{\psi_n} H^n(G,C) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(G,A) \xrightarrow{\varphi_{n+1}} \dots$$

Klopsch

<u>Bew</u>: folgt direkt mit (8.6)(ii) und (8.7). //

(8.5) <u>Satz</u> Sei $\vartheta: G_2 \to G_1$ ein stetiger Homom zw proendl Gruppen, und sei

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \gamma\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm, wobei

- in der oberen Reihe eine paßgenaue kurze exakte Sequenz von top G_1-Moduln vorliegt,
- in der unteren Reihe eine paßgenaue kurze exakte Sequenz von top G_2-Moduln vorliegt,
- (ϑ, α), (ϑ, β), (ϑ, γ) verträgliche Paare im Sinne von (8.1) bilden.

Dann kommutiert

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & A_1^{G_1} & \longrightarrow & B_1^{G_1} & \longrightarrow & C_1^{G_1} & \longrightarrow & H^1(G_1, A_1) & \longrightarrow \dots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \to & A_2^{G_2} & \longrightarrow & B_2^{G_2} & \longrightarrow & C_2^{G_2} & \longrightarrow & H^1(G_2, A_2) & \longrightarrow \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \longrightarrow & H^n(G_1, B_1) & \longrightarrow & H^n(G_1, C_1) & \longrightarrow & H^{n+1}(G_1, A_1) & \longrightarrow \dots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \dots \longrightarrow & H^n(G_2, B_2) & \longrightarrow & H^n(G_2, C_2) & \longrightarrow & H^{n+1}(G_2, A_2) & \longrightarrow \dots, \end{array}$$

wobei in den Reihen jeweils die langen exakten Sequenzen wie in (8.8) stehen und die vertikalen Abb gemäß (8.2) gerade die Abb $(\vartheta,\alpha)^*_n$, $(\vartheta,\beta)^*_n$, $(\vartheta,\gamma)^*_n$ für $n\in\mathbb{N}_0$ sind.

__Bew__ folgt leicht mit (8.2) und (8.7). //

(8.10) __Def und Folg__ Sei G eine proendl Gruppe und $H\leq_{alg} G$. Sei A ein top H-Modul.

Setze

$$M^G(A) = \{ f \mid f: G\to A \text{ stetig} \}$$

und

$$M_H^G(A) = \{ f\in M^G(A) \mid \forall x\in G\ \forall h\in H: (xh)f = (x)f.h \}.$$

Merke: $M^G(A) = M^G_{\{1\}}(A)$

Für $f\in M_H^G(A)$ und $g\in G$ definieren wir $f^g\in M_H^G(A)$ wie folgt:

$$(x)f^g = (gx)f \quad \text{für } x\in G.$$

[Offenbar ist f^g stetig, also $f^g\in M^G(A)$.

Weiter gilt für $x\in G$ und $h\in H$:

$$(xh)f^g = (gxh)f = (gx)f.h = (x)f^g.h.]$$

Kopersch

Merke: $M^G(A)$ ist in natürlicher Weise

ein abstrakter G-Modul; und $M_H^G(A)$ ist ein Untermodul

$$(x)(f_1+f_2) = (x)f_1 + (x)f_2 ,$$

$$(f_1+f_2)^g = f_1^g + f_2^g , \quad (f^{g_1})^{g_2} = f^{g_1 g_2} , \quad f^1 = f$$

für ... ✓

Weiter ist

$$\circledast \quad \pi : M_H^G(A) \to A , \quad f \mapsto (1)f$$

ein H-Modulhomom; es gilt $M_H^G(A)\pi = A$

(„π ist surjektiv").

denn: Wähle eine stetige Repräsentantenabb.

$\tau : G/H \to G$ (gemäß Übg. 5), so daß

$(xH)\tau . H = xH$ für $x \in G$ und $H\tau = 1$ sind. Dann ist

$$\beta : G \to H , \quad x \mapsto ((xH)\tau)^{-1} \cdot x$$

stetig, und es gelten $(1)\beta = 1$,

$\forall x \in G \; \forall h \in H : (xh)\beta = (x)\beta . h$.

Also ist, für bel. vorgegebenes $a \in A$,

$$f_a : G \to A , \quad x \mapsto a . (x)\beta$$

in $M_H^G(A)$ und $f_a\pi = (1)f_a = a.1 = a$. /

27/28

Klopsch

<u>Fakt</u>: Bzgl der KO-Topologie wird

$M^G(A)$ zu einem top G-Modul;

und $M_H^G(A)$ ist ein abgeschl Untermodul.

[ähnlich wie in (7.13); wir betrachten wie in §7 angedeutet durchweg den Fall, daß A hausdorffsch ist: Dann lassen sich Punkte stets von abgeschl Mengen durch disj offene Umgeb trennen ...]

Ist A ein diskreter G-Modul, so sind $M^G(A)$ und $M_H^G(A)$ ebenfalls diskret.

[Übung: $f : G \to A$ stetig bedeutet, daß Gf endl ist und f durch ein geeignetes G/N, $N \trianglelefteq_{off} G$, faktorisiert ...]

(8.11) <u>Lem</u> Sei G eine proendl Gruppe und $H \leq_{abg} G$.

Seien A ein diskreter H-Modul sowie B ein top G-Modul und $\vartheta : B \to A$ ein stetiger H-Modulhomom.

Dann ex genau ein stetiger G-Modulhomom $\tilde{\vartheta} : B \longrightarrow M_H^G(A)$ mit

$$\tilde{\vartheta}\pi = \vartheta,$$

$$\begin{tikzcd} & M_H^G(A) \arrow[d, "\pi"] \\ B \arrow[ur, "\tilde{\vartheta}"] \arrow[r, "\vartheta"'] & A \end{tikzcd}$$

wobei $\pi : M_H^G(A) \to A$ wie in (8.10) (*) def ist.

<u>Bew</u> Als einziger Kandidat kommt die

$$\tilde{\vartheta} : B \longrightarrow M_H^G(A), \quad b \mapsto (b)\tilde{\vartheta} = f_b$$

mit

$$f_b : G \longrightarrow A, \quad (x) f_b = (b.x)\vartheta$$

in Frage.

[Gilt $\tilde{\vartheta}\pi = \vartheta$, so folgt für $b \in B$ und $x \in G$:

$$\begin{aligned}
(x)[(b)\tilde{\vartheta}] &= (x.1)[(b)\tilde{\vartheta}] \\
&= (1)[(b)\tilde{\vartheta}^{x}] \\
&= [(b)\tilde{\vartheta}^{x}]\pi \\
&= [(b.x)\tilde{\vartheta}]\pi \\
&= (b.x)\vartheta ;
\end{aligned}$$

offenbar ist f_b stetig, also $f_b \in M^G(A)$,

und für $x \in G$, $h \in H$ gilt

$$(xh) f_b = (b.xh)\vartheta = (b.x)\vartheta . h = (x) f_b . h,$$

also $f_b \in M_H^G(A)$.]

Offenbar gilt für $b \in B$,

$$(b)\tilde{\vartheta}\pi = (1)[(b)\tilde{\vartheta}] = (1) f_b = (b)\vartheta .$$

Für $b \in B$, $g \in G$ und $x \in G$ gilt weiter

$$\begin{aligned}
(x)[(b.g)\tilde{\vartheta}] &= ((b.g).x)\vartheta = (b.gx)\vartheta \\
&= (gx)[(b)\tilde{\vartheta}] = (x)[(b)\tilde{\vartheta}g]
\end{aligned}$$

und offenkundig verträgt sich $\tilde{\vartheta}$ mit Addition; somit ist $\tilde{\vartheta}$ ein Homom zw (abstr) G-Moduln.

Zz bleibt: $\tilde{\vartheta}$ ist stetig. Sei $f \in M_H^G(A)$.

Da A diskret ist, ex $N \trianglelefteq_{\text{off}} G$ und $t_1, \dots, t_r \in G$ mit $G = \dot{\bigcup}_{i=1}^{r} \underbrace{t_i N}_{= N t_i}$ sowie $a_1, \dots, a_r \in A$ dergestalt, daß

$$(t_i N) f = \{a_i\} \quad \text{für} \quad 1 \le i \le r \quad \text{gilt.}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \{f\} \tilde{\vartheta}^{-1} &= \{ b \in B \mid f_b = f \} \\ &= \bigcap_{i=1}^{r} \{ b \in B \mid \forall y \in N : (b.y t_i) \vartheta \in \{a_i\} \} \\ &= \bigcap_{i=1}^{r} \{ b \in B \mid b.N \subseteq \underbrace{(\{a_i\} \vartheta^{-1}).t_i^{-1}}_{\text{offen in } B} \} \\ &\subseteq_{\text{off}} B. \end{aligned}$$

[$b.N \subseteq \mathcal{U} \subseteq_{\text{off}} B$ und $N \subseteq G$ kompakt

$\leadsto$ $\exists\, W_1, \dots, W_m \subseteq_{\text{off}} B \;\exists\, V_1, \dots, V \subseteq_{\text{off}} G$:

$\forall j \in \{1, \dots, m\}$: $b \in W_j \wedge W_j . V_j \subseteq \mathcal{U}$

und $N \subseteq V_1 \cup \dots \cup V_m$

$\leadsto$ $b \in W = W_1 \cap \dots \cap W_m \subseteq_{\text{off}} B$ und $W.N \subseteq \mathcal{U}$] //

Klopsch

(8.12) <u>Def</u>

Sei G eine proendl Gruppe und $H \leq_{abg} G$.
Sei A ein top H-Modul. Ein <u>von A koinduzierter</u> G-Modul besteht aus einem top G-Modul M und einem stetigen H-Modulhomom $\pi : M \to A$ mit der folgenden <u>universellen Eigenschaft</u>:

(*) Ist B ein top G-Modul und $\vartheta : B \to A$ ein stetiger H-Modulhomom, so ex. genau ein stetiger G-Modulhomom $\tilde{\vartheta} : B \to M$ mit $\tilde{\vartheta}\pi = \vartheta$.

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "\pi"] \\ B \arrow[ur, "\tilde{\vartheta}"] \arrow[r, "\vartheta"'] & A \end{tikzcd}$$

<u>Bem</u> Gemäß (8.11) liefert $M_H^G(A)$ einen von A koinduzierten G-Modul, sofern A ein diskreter H-Modul ist; in Wahrheit verallgemeinert sich die Konstruktion auf allgem H-Moduln A.
Von A koinduzierte G-Moduln sind bis auf geeignete Isom eindeutig:

$$\begin{tikzcd} & M_1 \arrow[d, "\pi_1"] \\ M_2 \arrow[ur, "\tilde{\pi}_2"] \arrow[r, "\pi_2"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & M_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ M_1 \arrow[ur, "\tilde{\pi}_1"] \arrow[r, "\pi_1"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & M_1 \arrow[d, "\pi_1"] \\ M_1 \arrow[ur, "\tilde{\pi}_1\tilde{\pi}_2"] \arrow[r, "\pi_1"'] & A \end{tikzcd}$$

$$(\tilde{\pi}_1 \tilde{\pi}_2)\pi_1 = \tilde{\pi}_1(\tilde{\pi}_2 \pi_1) = \tilde{\pi}_1 \pi_2 = \pi_1 = \mathrm{id}_{M_1}\pi_1 \quad \text{etc}$$

Klopsch

<u>Spezialfall</u> Für $H = \{1\}$ und eine abelsche top Gruppe ($\equiv$ top H-Modul) A nennen wir den von A koinduzierten G-Modul schlicht einen <u>koinduzierten Modul</u> für G.

Für jede diskrete abelsche Gruppe A ist $M^G(A) = M^G_{\{1\}}(A)$ ein diskreter koinduzierter Modul in diesem Sinne.

(8.13) <u>Lem</u> Sei G eine proendl. Gruppe.

(1) Sei A ein diskreter G-Modul. Dann ist $\iota_A : A \to M^G(A)$, $a \mapsto f_a$

mit $f_a : G \to A$, $(x)f_a = a.x$

eine Einbettung als G-Modul.

(2) Zu jedem diskreten G-Modul A ex eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow M \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

diskreter G-Moduln, wobei M koinduziert ist.

<u>Bew skizze</u>: (1) Offenkundig ist ι_a eine Einbettung als abelsche Gruppe; für $x \in G$ und $a \in A, g \in G$ gilt zudem

$$(x) f_a{}^g = (gx) f_a = a.gx = (x) f_{a.g}\,.$$

(2) folgt aus (1) mit

$M = M^G(A)$ und $M \to Q = M/A_{\nu_A}$

die kanon Proj.

(8.14) Hilfssatz

Sei G eine proendl Gruppe, A eine diskrete abel Gruppe und $M = M^G(A)$ koinduziert.

Dann gilt

$H^0(G,M) \cong A$ und $H^n(G,M) = 0$ für $n \geq 1$.

Bew: Offenbar ist

$$H^0(G,M) \cong \{ f \in M \mid \forall g \in G : f = fg \}$$
$$= \{ f : G \to A \mid f \text{ konstant} \} \cong A.$$

Sei nun $n \geq 1$ und $f \in Z^n(G,M)$. Da $f : G^{(n)} \to M$ stetig ist und M diskret ist, ex $N \trianglelefteq_{\text{off}} G$ dergestalt, daß f über $(G/N)^{(n)}$ faktorisiert. Wir def eine $(n-1)$-Kokette

$h \in C^{n-1}(G,M)$ über

$$(y)[(x_1,\dots,x_{n-1})h] = \underbrace{(-1)^n \cdot (1)[\underbrace{(x_1,\dots,x_{n-1},y)f}_{\in M}]}_{\in A} \quad \text{für } (x_1,\dots,x_{n-1}) \in G^{(n-1)} \text{ und } y \in G.$$

[Merke: h faktorisiert über $(G/N)^{(n-1)}$ und ist somit stetig]

Wir prüfen, für $y \in G$ und $(x_1,\dots,x_n) \in G^{(n)}$:

$$(y)\left[\,(x_1,\dots,x_n)(h\partial_n)\,\right]$$

$$= (y)\Big[\,(x_2,\dots,x_n)h + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i(\dots,x_ix_{i+1},\dots)h$$
$$+ (-1)^n (x_1,\dots,x_{n-1})h^{\,x_n}\Big]$$

$$= (-1)^n\cdot(1)\Big[\,(x_2,\dots,x_n,y)f + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i(\dots,x_ix_{i+1},\dots,y)f$$
$$+ (-1)^n(x_1,\dots,x_{n-1},x_ny)f\,\Big]$$

$$= (-1)^n\cdot(1)\Big[\,(x_1,\dots,x_n,\cancel{y})\underbrace{(f\,\partial_{n+1})}_{=0}$$
$$-(-1)^{n+1}(x_1,\dots,x_n)f\,y\,\Big]$$

$$= (y)\left[\,(x_1,\dots,x_n)f\,\right].$$

Also gilt $f = h\,\partial_n \in B^n(G,M)$. //

(8.15) <u>Lem</u> Sei G eine proendl Gruppe, A eine diskrete abelsche Gruppe und $M = M^G(A)$.

(1) Ist $H \leq_{abg} G$ und $S \subseteq_{abg} G$ ein Rechtsrepräsentantensystem für H in G und bezeichnet B die diskrete abelsche Gruppe der stetigen Abb von S nach A, so gilt
$M = M^G(A) \cong M^H(B)$ als H-Moduln.

(2) Ist $K \trianglelefteq_{\text{abg}} G$, so ist

$$M^K = \{ f \in M \mid f^g = f \text{ für alle } g \in K \}$$

als G/K - Modul isomorph zu $M^{G/K}(A)$.

<u>Beweisskizze</u> Die jeweils beteiligten Moduln sind allesamt diskret.

(1) Betrachte

$$M^H(B) \longrightarrow M^G(A), \quad f \mapsto \tilde{f}, \quad \text{wobei}$$

$$(hx)\tilde{f} = (x)[(h)f] \quad \text{für } h \in H, x \in S \text{ gelte.}$$

(2) Betrachte

$$M^K \longrightarrow M^{G/K}(A), \quad f \mapsto \tilde{f}, \quad \text{wobei}$$

$$(gK)\tilde{f} = (g)f \quad \text{für } g \in G \text{ gelte.} \quad //$$

(8.16) <u>Beispiel / Anwendung</u>:

$G = \langle g \rangle \cong C_{p^r}$ für $p \in \mathbb{P}$, $r \in \mathbb{N}$

$\mathbb{F}_p$ der triviale G - Modul

Berechne $H^n(G, \mathbb{F}_p)$ für $n \geq 0$!

- $H^0(G, \mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p^{\,G} = \mathbb{F}_p$

$M = \mathbb{F}_p G \cong M^G(\mathbb{F}_p)$ als G-Modul

$$\Big[\sum_{x \in G} a_x x \mapsto f : G \to \mathbb{F}_p, \ (x)f = a_{x^{-1}} \Big]$$

Da G abelsch ist, sind

$$\alpha : M \to M, \quad z \mapsto z(g-1)$$

und

$$\beta : M \to M, \quad z \mapsto z(1+g+g^2+\ldots+g^{p^r-1})$$

G-Modulendom. Offenbar gelten

$$\mathrm{Kern}(\alpha) = \mathrm{Bild}(\beta) = \{ a(1+g+\ldots+g^{p^r-1}) \mid a \in \mathbb{F}_p \} \cong \mathbb{F}_p$$

und

$$\mathrm{Kern}(\beta) = \mathrm{Bild}(\alpha) = I := \{ \sum_{i=0}^{p^r-1} a_i g^i \mid \sum_{i=0}^{p^r-1} a_i = 0 \}$$

[Augmentationsideal von $\mathbb{F}_p G$]

Wir erhalten kurze exakte Sequenzen

$$0 \to \mathbb{F}_p \to M \xrightarrow{\alpha} I \to 0$$

$$0 \to I \to M \xrightarrow{\beta} \mathbb{F}_p \to 0$$

von G-Moduln.

Aus der zugeh. langen exakten Sequenz lesen wir jeweils heraus:

$$\underbrace{H^{n-1}(G,M)}_{=0 \text{ für } n\geq 2} \to H^{n-1}(G,I) \xrightarrow{\delta} H^n(G,\mathbb{F}_p) \to \underbrace{H^n(G,M)}_{=0 \text{ für } n\geq 1}$$

und

$$\underbrace{H^{n-1}(G,M)}_{=0 \text{ für } n\geq 2} \to H^{n-1}(G,\mathbb{F}_p) \xrightarrow{\delta} H^n(G,I) \to \underbrace{H^n(G,M)}_{=0 \text{ für } n\geq 1}.$$

Das ergibt induktiv:

$$H^{2m}(G,\mathbb{F}_p) = H^2(G,\mathbb{F}_p)$$
$$H^{2m+1}(G,\mathbb{F}_p) = H^1(G,\mathbb{F}_p) \qquad \text{für } m \geq 1$$

Schließlich gilt: $H^1(G,\mathbb{F}_p) = \mathrm{Hom}(G,\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p$

und $H^2(G,\mathbb{F}_p) \cong \underbrace{H^1(G,I)}_{\text{surj Bild von } H^0(G,\mathbb{F}_p)\cong\mathbb{F}_p}$;

da $C_{p^{r+1}}$ eine nicht zerfallende zentrale Erw von $G \cong C_{p^r}$ darstellt, folgern wir $H^2(G,\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p$.

Also gilt $H^n(G,\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p$ für alle $n \geq 0$.

(8.17) Lem Sei G eine endl Gruppe, $m = |G|$, und sei A ein diskreter G-Modul.

Dann gelten:

(1) $m \cdot H^n(G,A) = 0$ für $n \geq 1$

(2) Aus $|A| < \infty$ und $\mathrm{ggT}(|A|,|G|) = 1$ folgt bereits $H^n(G,A) = 0$ für $n \geq 1$.

Bew (2) folgt direkt aus (1), denn

$$|A| \cdot C^n(G,A) = 0 \quad \text{für } n \geq 0.$$

zu (1): Wir verwenden Induktion nach n.

$n=1$: Setze $M = M^G(A)$ und sei

$$0 \to A \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\eta} Q \to 0$$

exakt; vgl (8.13). Dabei sei $Q = M/A\iota$.

Aus der zugeh langen exakten Sequenz lesen wir heraus:

$$M^G \xrightarrow{\eta_0} Q^G \xrightarrow{\delta} H^1(G,A) \xrightarrow{\iota_1} \underbrace{H^1(G,M)}_{=0},$$

also $H^1(G,A) \cong Q^G / M^G\eta_0$. (*)

Für $f + A\iota \in Q^G$ gilt

$$\forall x \in G: \ f - f.x \in A\iota;$$

somit ist $$mf - \underbrace{\sum_{x\in G} f.x}_{\in M^G} = \sum_{x \in G} (f - f.x) \in A\iota.$$

Das ergibt

$$mf \in M^G + A\iota$$

und somit

$$m(f + A\iota) \in (M^G + A\iota)/A\iota = \mathrm{Bild}(\eta_0).$$

Mit (*) erhalten wir $m \cdot H^1(G,A) = 0$.

$\underline{n \geq 2}$: Aus der langen exakten Sequenz lesen wir ab:

$$\underbrace{H^{n-1}(G,M)}_{=0} \to H^{n-1}(G,Q) \to H^n(G,A) \to \underbrace{H^n(G,M)}_{=0},$$

also $\underbrace{H^{n-1}(G,Q)}_{=0 \text{ nach IV}} \cong H^n(G,A)$. //

allgemeines Prinzip: „Dimensionsverlagerung"

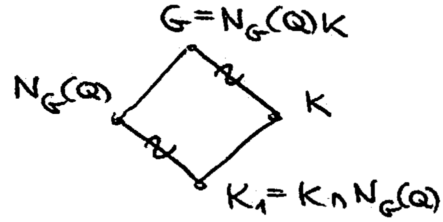
(8.18) **Satz** [erster Teil des Satzes von Schur und Zassenhaus] ← siehe (4.11) Klopsch

Sei G eine endl Gruppe und $K \trianglelefteq G$ mit $\mathrm{ggT}(|K|, |G:K|) = 1$. Dann ex $H \leq G$ mit $G = H \ltimes K$.

Bew (per Induktion nach $|G|$):

Offenbar genügt es $H \leq G$ mit $|H| = |G:K|$ zu finden. Besitzt K eine Sylowuntergruppe Q mit $Q \ntrianglelefteq K$, so gilt

$$G = N_G(Q)\, K$$ und



$K_1 = K \cap N_G(Q) \trianglelefteq N_G(Q)$ erfüllt die Bed $\mathrm{ggT}(|K_1|, \underbrace{|N_G(Q):K_1|}_{=|G:K|}) = 1$;

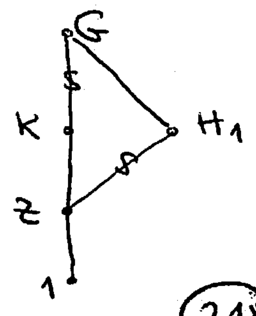
wegen $|N_G(Q)| < |G|$ folgt per Induktion:

$N_G(Q)$ enthält bereits eine Untergruppe H mit $|H| = |G:K|$.

Also dürfen wir annehmen:

$K \neq 1$ ist nilpotent ($\Leftrightarrow$ jede Sylowuntergr ist ein Normalteiler).

Setze $Z = Z(K) \neq 1$. Per Ind besitzt G/Z eine Untergr H_1/Z der Ordnung $|G:K|$.

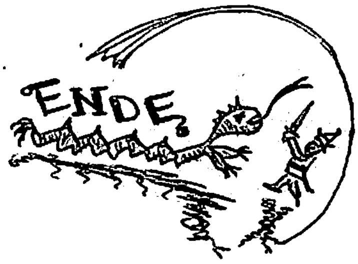


Merke: $\text{ggT}\left(|Z|, \overbrace{|H_1:Z|}^{=|G:K|}\right) = 1$.

Ist $H_1 \subsetneq G$, so besitzt H_1, wieder per Ind, eine Untgr H mit $|H| = |G:K|$.

Sei nun also $H_1 = G$ und damit $K = Z$ abelsch. Wir betrachten K als G/K-Modul über die natürl Wirkung per Konjugation.

Gemäß (8.17)(2) gilt $H^2(G/K, K) = 0$, so daß die Erweiterung $K \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G/K$ nach (7.10) tatsächlich zerfällt. //



... usw ...

Gerne hätte ich noch gezeigt:

> Sei G eine proendl Gruppe und A ein diskreter G-Modul.
> Dann ist
> $$H^n(G, A) \cong \varinjlim_{N \trianglelefteq_{off} G} H^n(G/N, A^N).$$

Für die tiefergehende Behandlung von Kohomologiegruppen wären dann (entsprechend zeitaufwendiger) Beschreibungen mittels freier/projektiver Auflösungen als nächster Schritt auf dem Programm ...

[s. Bücher von Ribes/Zalesskii und Wilson]