Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Sommersemester 2021

Gruppentheorie II: Proendliche Gruppen – Blatt 1

Abgabe der Lösungen bis 21.04.2021 um 10.30 Uhr per E-Mail

Willkommen in der Vorlesung und den Übungen zur „Gruppentheorie II“!

Bitte bereiten Sie Aufgaben 1.1 bis 1.4 als Präsenzaufgaben für die Übungsstunde am 21.04. vor und geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 1.5 und 1.6 ab; weitere und aktuelle Informationen finden sich stets auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenII_SS21/`

Insbesondere sind Abgaben per E-Mail in einer einzelnen PDF-Datei vertretbarer Größe vorzunehmen; die Datei soll sich problemlos A4-formatig und schwarz-weiß ausdrucken lassen. Die E-Mail ist direkt an den Übungsgruppenleiter, Herrn Dominic Witt (`dominic.witt@hhu.de`), zu richten; bitte versenden Sie Ihre Nachricht von Ihrer offiziellen HHU-E-Mail-Adresse aus.

Aufgabe 1.1

(a) Der Begriff des topologischen Raumes kann axiomatisch auch über die Angabe der abgeschlossenen Teilmengen erfolgen. Formulieren Sie geeignete Axiome.

(b) Erläutern Sie: Stetige Bijektionen zwischen topologischen Räumen sind im allgemeinen noch keine Homöomorphismen.

(c) Erläutern Sie: Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ sind die Räume $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$, jeweils ausgestattet mit der euklidischen Topologie, nicht homöomorph zueinander.

Aufgabe 1.2

(a) Sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ für eine Familie X_i, $i \in I$, von topologischen Räumen, mit kanonischen Projektionen $\pi_i : X \to X_i$, und sei Y ein weiterer topologischer Raum. Zeigen Sie: Eine Abbildung $\varphi : Y \to X$ ist stetig genau dann, wenn $\varphi\pi_i : Y \to X_i$ für alle $i \in I$ stetig ist.

(b) Zeigen Sie: Das Cantorsche Diskontinuum $C = \{\sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j} \mid a_j \in \{0,2\}\} \subseteq [0,1]_{\mathbb{R}}$ ist homöomorph zu dem Produktraum $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ mit diskreten Faktoren $X_i = \{0,1\}$.

(c) Die Sorgenfrey-Gerade besitzt die Trägermenge $\mathbb{R}$, und ihre Topologie wird erzeugt von der Basis $\mathcal{B} = \{[a,b)_{\mathbb{R}} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Zeigen Sie: Die Sorgenfrey-Gerade erfüllt das erste, aber nicht das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

Aufgabe 1.3

(a) Erläutern Sie: Ein topologischer Raum X ist hausdorffsch genau dann, wenn die Diagonale $\{(x,x) \mid x \in X\}$ in $X \times X$ bzgl. der Produkttopologie abgeschlossen ist.

(b) Erläutern Sie: Ein topologischer Raum X ist quasi-kompakt genau dann, wenn für jede nicht-leere Familie A_i, $i \in I$, von abgeschlossenen Teilmengen von X, die die Bedingung

$$\bigcap \{A_i \mid i \in J\} \neq \varnothing \quad \text{für alle } J \subseteq I \text{ mit } 1 \leq |J| < \infty$$

erfüllt, bereits $\bigcap \{A_i \mid i \in I\} \neq \varnothing$ gilt.

(c) Sei X ein kompakter topologischer Raum und $A \subseteq X$. Zeigen Sie: A ist abgeschlossen in X genau dann, wenn A kompakt ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 1.4

(a) Sei X ein lokalkompakter topologischer Raum, d. h. X sei hausdorffsch und jeder Punkt besitze eine kompakte Umgebung. Zeigen Sie: Dann besitzt jeder Punkt $x \in X$ sogar eine Umgebungsbasis, die aus kompakten Mengen besteht.

(b) Sei $\varphi\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Erläutern Sie: Ist X quasi-kompakt (bzw. zusammenhängend), so ist auch $X\varphi$ quasi-kompakt (bzw. zusammenhängend).

(c) Erläutern Sie: Jeder topologische Raum X ist die disjunkte Vereinigung seiner Zusammenhangskomponenten, und jede Zusammenhangskomponente ist abgeschlossen.

Aufgabe 1.5 (4 Punkte)

Sei X ein kompakter topologischer Raum. Beweisen Sie, daß je zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen von X sich durch disjunkte offene Umgebungen trennen lassen, d. h. zu $A, B \subseteq_{\text{abg}} X$ mit $A \cap B = \varnothing$ existieren stets $U, V \subseteq_{\text{off}} X$ mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ und $U \cap V = \varnothing$.

Bemerkung: Man sagt in diesem Fall, X erfülle das Trennungsaxiom T_4.

Aufgabe 1.6 (4 Punkte)

Sei p eine Primzahl. Jedes $x \in \mathbb{Q} \smallsetminus \{0\}$ läßt sich eindeutig schreiben als $x = ap^m/b$, wobei $m, a, b \in \mathbb{Z}$ die Bedingungen $b > 0$, $\operatorname{ggT}(a, b) = 1$ und $p \nmid ab$ erfüllen. Wir setzen $v_p(x) = m$ und $|x|_p = p^{-m}$. Zusätzlich definieren wir $v_p(0) = \infty$ und $|0|_p = 0$. Man nennt $v_p\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ die *p-adische Bewertung* und $|\cdot|_p\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ den *p-adischen Absolutbetrag* auf $\mathbb{Q}$.

(a) Zeigen Sie: $|\cdot|_p$ ist ein nicht-archimedischer Absolutbetrag auf dem Körper $\mathbb{Q}$ im Sinne der nachfolgenden Definition.

Ein *nicht-archimedischer Absolutbetrag* auf einem Körper K ist eine Abbildung $K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto |x|$ dergestalt, daß für alle $x, y \in K$ gilt:

- $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$,
- $|xy| = |x| \cdot |y|$,
- $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$.

(b) Verifizieren Sie: Durch die Festlegung $d_p(x, y) = |x - y|_p$ für $x, y \in \mathbb{Q}$ wird eine Abstandsfunktion auf $\mathbb{Q}$ erklärt, d. h. $(\mathbb{Q}, d_p)$ zu einem metrischen Raum. Weiterhin gilt die ultrametrische Dreiecksungleichung

$$d_p(x, y) \leq \max\{d_p(x, z), d_p(y, z)\} \quad \text{für } x, y, z \in \mathbb{Q}.$$

Die von d_p auf $\mathbb{Q}$ induzierte Topologie heißt die *p-adische Topologie.*

(c) Sei nun $p = 5$. Erläutern Sie: Bezüglich der 5-adischen Topologie gilt

$$3 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^3 + \ldots = 1/2;$$

insbesondere liegt $1/2$ also im topologischen Abschluß von $\mathbb{Z}$.