Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Sommersemester 2021

Gruppentheorie II: Proendliche Gruppen – Blatt 2

Abgabe der Lösungen bis 28.04.2021 um 10.30 Uhr per E-Mail

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 2.1 und 2.2 ab, und bereiten Sie zusätzlich die Aufgaben 2.3 und 2.4 für die Übungsstunde vor; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenII_SS21/`

Aufgabe 2.1 (4 Punkte)

Sei G eine topologische Gruppe. Erläutern bzw. zeigen Sie:

(a) Jede Untergruppe $H \le G$ ist selbst eine topologische Gruppe bezüglich der Unterraumtopologie.

(b) Sei $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler. Dann ist die Faktorgruppe G/N eine topologische Gruppe bezüglich der Quotiententopologie, und der kanonische Homomorphismus $\pi\colon G \to G/N$ ist offen, d. h., für jedes $U \subseteq_{\mathrm{off}} G$ ist $U\pi \subseteq_{\mathrm{off}} G/N$.

Hinweis: Es bietet sich an, zunächst zu zeigen, daß $\pi\colon G \to G/N$ offen ist. Anschließend ist es hilfreich, sich zu überlegen, daß $(G \times G)/(N \times N) \cong G/N \times G/N$ gilt.

Aufgabe 2.2 (4 Punkte)

Sei G eine kompakte topologische Gruppe, und seien $m \in \mathbb{N}_0$ sowie $A_1, \ldots, A_m \subseteq_{\mathrm{abg}} G$. Dann ist für jedes Gruppenwort $w = w(x_1, \ldots, x_m) \in \langle x_1, \ldots, x_m \rangle$, also jedes Element der freien Gruppe vom Rang m, die Wertemenge der zugehörigen Einsetzungsabbildung

$$w(A_1, \ldots, A_m) = \{ w(a_1, \ldots, a_m) \mid a_i \in A_i \text{ für } 1 \le i \le m \}$$

abgeschlossen in G.

Aufgabe 2.3

Ein topologischer Raum X heißt *wegzusammenhängend*, falls es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ stets einen „Weg von x nach y" gibt, d. h. eine stetige Abbildung $\omega\colon [0,1] \to X$ von dem reellen Einheitsinterval nach X mit Anfangswert $0\omega = x$ und Endwert $1\omega = y$.

(a) Zeigen Sie: Ist X wegzusammenhängend, so ist X zusammenhängend.

(b) Betrachten Sie den Raum

$$X = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x^{-1}, x \sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}_{>0}\} \subseteq \mathbb{R}^2,$$

ausgestattet mit der Unterraumtopologie. Zeigen Sie, daß X zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 2.4

(a) Zeigen Sie, daß $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, bzgl. der euklidischen Topologie, lokalkompakte topologische Gruppen sind.

(b) Zeigen Sie, daß $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ zusammenhängend ist.

(c) Beweisen Sie, daß $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ nicht zusammenhängend ist.

(d) Wieviele Zusammenhangskomponenten hat $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$?

Hinweis: Denken Sie an die Determinantenabbildung und an Normalformen für Matrizen; verwenden Sie Aufgabe 2.3 (a).