Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Sommersemester 2021

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Gruppentheorie II: Proendliche Gruppen – Blatt 3

Abgabe der Lösungen bis 05.05.2021 um 10.30 Uhr per E-Mail

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 3.2 und 3.4 ab, und bereiten Sie die übrigen Aufgaben für die Übungsstunde vor; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenII_SS21/`

Aufgabe 3.1

Sei G_i, $i \in I$, eine Familie von topologischen Gruppen. Erläutern Sie: Dann ist das cartesische Produkt $G = \prod_{i \in I} G_i$ bezüglich der koordinatenweisen Multiplikation und der Produkttopologie eine topologische Gruppe.

Aufgabe 3.2 (4 Punkte)

(a) Sei $p \in \mathbb{P}$ eine Primzahl, und sei $G = \prod_{i \in \mathbb{N}} G_i$ das cartesische Produkt von diskreten zyklischen Gruppen $G_i \cong C_p$ der Ordnung p.
Zeigen Sie: Die topologische Gruppe G (vergleiche Aufgabe 3.1) besitzt Untergruppen vom Index p, die in der Produkttopologie nicht abgeschlossen sind.

(b) Sei $G = \prod_{p \in \mathbb{P}} G_p$ das cartesische Produkt von diskreten zyklischen Gruppen $G_p \cong C_p$ der Ordnung p.
Zeigen Sie: Die abgeschlossenen Untergruppen von G sind genau die Untergruppen der Form

$$H_P = \{(x_p)_{p \in \mathbb{P}} \in G \mid x_p = 1 \text{ für } p \notin P\} \cong \prod_{p \in P} G_p, \qquad (P \subseteq \mathbb{P}).$$

Folgern Sie: Jede abgeschlossene Untergruppe von G besitzt eine dichte zyklische Untergruppe (d. h., wird topologisch von einem Element erzeugt).

Hinweis: Betrachten Sie zunächst spezieller offene Untergruppen von G.

Aufgabe 3.3

(a) Welche der folgenden Gruppen sind lokal-endlich? Warum?

- die symmetrische Gruppe $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$,
- $\mathrm{FSym}(\mathbb{N}) = \{\pi \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N}) \mid n\pi \neq n \text{ für nur endlich viele } n \in \mathbb{N}\} \leq \mathrm{Sym}(\mathbb{N})$,
- $\mathbb{Q}^n/\mathbb{Z}^n$ bezüglich $+$ für $n \in \mathbb{N}$,
- $\mathbb{C}^n/\mathbb{R}^n$ bezüglich $+$ für $n \in \mathbb{N}$.

(b) Vermutung: Eine abelsche Gruppe ist lokal-endlich genau dann, wenn sie periodisch ist (d. h. wenn jedes Element endliche Ordnung hat). – Wahr oder falsch?

(c) Vermutung: Eine auflösbare Gruppe ist lokal-endlich genau dann, wenn sie periodisch ist. – Wahr oder falsch?

(d) Kennen Sie (ggf. aus der Vorlesung „Einführung in die Gruppentheorie") eine periodische Gruppe, die nicht lokal-endlich ist?

Bitte wenden!

Aufgabe 3.4 (4 Punkte)

Sei $\mathfrak{A} = (A_i, \varphi_{ij})_I$ ein direktes System von *abelschen* Gruppen über einer gerichteten Menge $I = (I, \leq)$. Sei $S = \bigoplus_{i \in I} A_i$ mit kanonischen Homomorphismen $\iota_i \colon A_i \to S$, $i \in I$, die direkte Summe der Gruppen A_i. Sei $R \leq S$ diejenige Untergruppe, die von allen Elementen der Form

$$x\varphi_{ij}\iota_j - x\iota_i \qquad \text{für } i,j \in I \text{ mit } i \leq j \text{ und } x \in A_i$$

erzeugt wird. Sei $A = S/R$, und für $i \in I$ sei $\varphi_i \colon A_i \to A$, $x \mapsto x\iota_i + R$.

(a) Zeigen Sie: A, ausgestattet mit φ_i, $i \in I$, bildet einen direkten Limes von $\mathfrak{A}$.

(b) Wieso funktioniert diese Konstruktion nicht allgemeiner für direkte Systeme von beliebigen (nicht notwendigerweise abelschen) Gruppen?

Aufgabe 3.5

Sei p eine Primzahl. Wir betrachten $\mathbb{Q}$, mit dem p-adischen Absolutbetrag $|\cdot|_p$ (welcher entsprechend einen p-adischen Abstandsbegriff nahelegt); vgl. Übungsblatt 1. Eine *Cauchyfolge* in $\mathbb{Q}$ bzgl. $|\cdot|_p$ ist eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen dergestalt, daß zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit:

$$|x_m - x_n|_p < \varepsilon \qquad \text{für alle } m,n \in \mathbb{N} \text{ mit } m,n \geq N.$$

Eine *Nullfolge* bzgl. $|\cdot|_p$ ist eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen dergestalt, daß die Folge $(|x_n|_p)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen eine Nullfolge im euklidischen Sinne ist.

(a) Zeigen Sie: Sei $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ eine beliebige Ziffern-Folge in $\{0,1,\ldots,p-1\}$. Dann bilden die Partialsummen $\sum_{i=0}^{n} a_i p^i$ eine Cauchyfolge bzgl. $|\cdot|_p$.

(b) Erläutern Sie: Die Folge $(p^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine Nullfolge bzgl. $|\cdot|_p$.

(c) Zeigen Sie: Eine formale Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ mit rationalen Summanden x_i symbolisiert über ihre Partialsummen genau dann eine Cauchyfolge bzgl. $|\cdot|_p$, wenn $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge bzgl. $|\cdot|_p$ ist.

(d) Erläutern Sie: Die Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$ bzgl. $|\cdot|_p$ bilden einen kommutativen Ring $\mathcal{R}$ mit Eins; Addition und Multiplikation sind hierbei koordinatenweise erklärt. Über die konstanten Folgen ist $\mathbb{Q}$ in natürlicher Weise als Unterring in diesen Ring $\mathcal{R}$ eingebettet. Die Nullfolgen bzgl. $|\cdot|_p$ bilden ein Ideal $\mathcal{N} \trianglelefteq \mathcal{R}$ und $\mathcal{R}/\mathcal{N}$ ist ein Körper.

Hinweis: Wie kann man ein multiplikatives Inverses einer Folge modulo $\mathcal{N}$ konstruieren?

(e) Zeigen Sie: $\mathbb{Q}$ bettet sich in natürlicher Weise als Unterring in den Körper $\mathbb{Q}_p = \mathcal{R}/\mathcal{N}$ ein. Weiter läßt sich der Absolutbetrag $|\cdot|_p$ eindeutig zu einem Absolutbetrag $|\cdot|_p$ auf $\mathbb{Q}_p$ fortsetzen. Bezüglich der induzierten Topologie ist $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{Q}_p$.

Bemerkung: Der Körper $\mathbb{Q}_p$, ausgestattet mit $|\cdot|_p$, heißt der *Körper der p-adischen Zahlen.*

Literaturhinweis: Die Konstruktion der p-adischen Zahlen kann auch auf anderem Wege erfolgen. Vertiefend oder ergänzend können Sie z. B. die Ausführungen in

(i) Leutbecher, Zahlentheorie, Springer-Verlag, 1996 (Kapitel 20)

(ii) Neukirch, Die p-adischen Zahlen, Kaptitel 6 in: Ebbinghaus e. a., Zahlen, Springer-Verlag, 1992

studieren.