Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Sommersemester 2021

# Gruppentheorie II: Proendliche Gruppen – Blatt 4

Abgabe der Lösungen bis 12.05.2021 um 10.30 Uhr per E-Mail

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 4.1 und 4.3 ab, und bereiten Sie die übrigen Aufgaben für die Übungsstunde vor; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenII_SS21/`

**Aufgabe 4.1** (4 Punkte)

Seien $\mathcal{X} = (X_i, \varphi_{ij})_I$ und $\mathcal{Y} = (Y_i, \psi_{ij})_I$ inverse Systeme von topologischen Räumen (bzw. topologischen Gruppen) über einer gerichteten geordneten Menge $I$ mit inversen Limites $X = \varprojlim_{i \in I} X_i$ und $Y = \varprojlim_{i \in I} Y_i$.
Formulieren Sie genauer und beweisen Sie: Dann ist $X \times Y = \varprojlim_{i \in I} X_i \times Y_i$.

**Aufgabe 4.2**

Sei $\mathcal{X} = (X_i, \varphi_{ij})_I$ ein inverses System von nicht-leeren Mengen über einer gerichteten geordneten Menge $I$. Zeigen Sie: Ist $I$ abzählbar und ist für $i, j \in I$ mit $i \geq j$ stets $\varphi_{ij} \colon X_i \to X_j$ surjektiv, so ist $X = \varprojlim_{i \in I} X_i \neq \varnothing$.

*Bemerkung*: Auf die Voraussetzung, daß $I$ abzählbar ist, kann im allgmeinen nicht verzichtet werden. Ein leicht zugängliches Beispiel dazu stammt von W. C. Waterhouse.[1]

**Aufgabe 4.3** (4 Punkte)

Sei $I = (I, \preceq)$ eine gerichtete geordnete Menge, und sei $\mathcal{X} = (X_i, \varphi_{ij})_I$ ein inverses System von topologischen Räumen (bzw. topologischen Gruppen). Eine Teilmenge $J \subseteq I$ heißt *konfinal*, sofern es zu jedem $i \in I$ ein $j \in J$ mit $i \preceq j$ gibt. Zeigen Sie:

(a) Ist

$$X = \varprojlim_{i \in I} X_i \qquad \text{bzgl.} \qquad \varphi_i \colon X \to X_i, \quad i \in I,$$

und ist $J \subseteq I$ mittels der induzierten Ordnung $\preceq|_{J \times J}$ gerichtet sowie

$$\widetilde{X} = \varprojlim_{j \in J} X_j \qquad \text{bzgl.} \qquad \widetilde{\varphi}_j \colon \widetilde{X} \to X_j, \quad j \in J,$$

so gibt es genau eine stetige Abbildung (bzw. genau einen stetigen Homomorphismus) $\vartheta \colon X \to \widetilde{X}$ mit der Eigenschaft: $\vartheta\widetilde{\varphi}_j = \varphi_j$ für alle $j \in J$.

(b) Ist $J \subseteq I$ konfinal, so ist $J$ jedenfalls mittels der induzierten Ordnung $\preceq|_{J \times J}$ gerichtet.

(c) Ist $I$ abzählbar unendlich, so gibt es eine konfinale Teilmenge $J \subseteq I$ dergestalt, daß die geordneten Mengen $J = (J, \preceq|_{J \times J})$ und $\mathbb{N} = (\mathbb{N}, \leq)$ isomorph zueinander sind.

(d) Ist $J \subseteq I$ konfinal, so ist $\varprojlim_{i \in I} X_i \cong \varprojlim_{j \in J} X_j$. Genauer vermittelt die in (a) konstruierte Abbildung einen natürlichen Isomorphismus.

*Bemerkung*: Insbesondere ist also jeder inverse Limes von abzählbar vielen endlichen Gruppen als topologische Gruppe bereits isomorph zu einem inversen Limes von endlichen Gruppen, die durch $\mathbb{N} = (\mathbb{N}, \leq)$ indiziert sind.

Bitte wenden!

[1] Proc. Amer. Math. Soc. **36** (1972), 618

**Aufgabe 4.4**

Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen und $G = \prod_{p\in\mathbb{P}} G_p$ das cartesische Produkt von alternierenden Gruppen $G_p \cong \mathrm{Alt}(p)$ vom Grad $p$. Zeigen Sie: Es gibt eine von 2 Elementen erzeugte dichte Untergruppe $\Gamma$ von $G$.

*Hinweis*: Verwenden Sie, daß sich jede alternierende Gruppe $\mathrm{Alt}(p)$ mit $p \geq 3$ von einem 3-Zykel (z.B. $(1\;2\;3)$) und einem $p$-Zykel (z.B. $(1\;2\;3\;\ldots\;p)$) erzeugen läßt. Benutzten Sie ferner, daß $\mathrm{Alt}(p)$ eine einfache Gruppe ist.

**Aufgabe 4.5**

Es bezeichne $\mathbb{F}_q$ einen endlichen Körper mit $q$ Elementen; ausgestattet mit der diskreten Topologie ist $\mathbb{F}_q$ ein topologischer Ring. Erläutern bzw. zeigen Sie:

(a) Der Ring der formalen Potenzreihen $\mathbb{F}_q[[t]]$ über $\mathbb{F}_q$ ist bzgl. der Produkttopologie ein total unzusammenhängender, kompakter topologischer Ring.

(b) Der Polynomring $\mathbb{F}_q[t]$ ist ein dichter Unterring von $\mathbb{F}_q[[t]]$.

(c) Es gilt

$$\mathbb{F}_q[[t]] \cong \varprojlim_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{F}_q[[t]]/t^i\mathbb{F}_q[[t]] \cong \varprojlim_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{F}_q[t]/t^i\mathbb{F}_q[t],$$

wobei die endlichen Faktorringe $R_i = \mathbb{F}_q[t]/t^i\mathbb{F}_q[t]$ mit der diskreten Topologie augestattet und durch die kanonischen Projektionen $\varphi_{ij}\colon R_i \to R_j$, für $i \geq j$, verbunden sind.

(d) Für die verbleibenden Aufgabenteile sei zusätzlich $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\mathsf{GL}_n(\mathbb{F}_q[[t]]) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}_q[[t]]) \mid \det(A) \in \mathbb{F}_q[[t]]^\times\}$$

eine total unzusammenhängende, kompakte topologische Gruppe.

Hierbei erhält $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}_q[[t]]) \cong \mathbb{F}_q[[t]]^{n^2}$ die Produkttopologie und $\mathsf{GL}_n(\mathbb{F}_q[[t]])$ die entsprechende Unterraumtopologie; die Einheitengruppe von $\mathbb{F}_q[[t]]$ erfüllt

$$\mathbb{F}_q[[t]]^\times = \{\textstyle\sum_{j=0}^{\infty} f_j t^j \mid f_0 \in \mathbb{F}_q^\times \text{ und } f_j \in \mathbb{F}_q \text{ für } j \geq 1\}.$$

(e) Weiter gilt

$$\mathsf{GL}_n(\mathbb{F}_q[[t]]) \cong \varprojlim_{i\in\mathbb{N}} \mathsf{GL}_n(\mathbb{F}_q[[t]]/t^i\mathbb{F}_q[[t]]) \cong \varprojlim_{i\in\mathbb{N}} \mathsf{GL}_n(\mathbb{F}_q[t]/t^i\mathbb{F}_q[t]),$$

wobei die endlichen Gruppen $G_i \cong \mathsf{GL}_n(\mathbb{F}_q[t]/t^i\mathbb{F}_q[t])$ mit der diskreten Topologie augestattet und durch kanonische Projektionen miteinander verbunden sind.

(f) Eine Umgebungsbasis $K_i$, $i \in \mathbb{N}$, für das neutrale Element Id in $G = \mathsf{GL}_n(\mathbb{F}_q[[t]])$ bilden die sogenannten *Hauptkongruenzuntergruppen*

$$K_i = \mathsf{GL}_n^i(\mathbb{F}_q[[t]]) = \mathrm{Kern}(G \to G_i) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}_q[[t]]) \mid A \equiv_{t^i} \mathrm{Id}\} \trianglelefteq_{\mathrm{off}} G.$$

Schließlich gilt $G \cong \varprojlim_{i\in\mathbb{N}} G_i \cong \varprojlim_{i\in\mathbb{N}} G/K_i$.