Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Sommersemester 2021

Gruppentheorie II: Proendliche Gruppen – Blatt 6

Abgabe der Lösungen bis 26.05.2021 um 10.30 Uhr per E-Mail

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 6.1 und 6.4 ab, und bereiten Sie die übrigen Aufgaben für die Übungsstunde vor; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenII_SS21/`

Aufgabe 6.1 (4 Punkte)

Sei $\mathfrak{K}$ eine Klasse von endlichen Gruppen, die unter (Isomorphie sowie) der Bildung von Untergruppen und (endlichen) direkten Produkten abgeschlossen sei.

Zeigen Sie: Für die pro-$\mathfrak{K}$-Vervollständigungen von abstrakten Gruppen G und H gilt kanonisch $\widehat{G \times H}_{\mathfrak{K}} \cong \widehat{G}_{\mathfrak{K}} \times \widehat{H}_{\mathfrak{K}}$.

Hinweis: Formulieren Sie zunächst präzise aus, was mit „kanonisch" gemeint ist.

Aufgabe 6.2

Sei $\mathfrak{K}$ eine Klasse von endlichen Gruppen, die unter (Isomorphie sowie) der Bildung von Untergruppen, Faktorgruppen und (endlichen) direkten Produkten abgeschlossen sei.

(a) Zeigen Sie: Jeder Homomorphismus $\vartheta\colon G \to H$ zwischen abstrakten Gruppen induziert einen kanonischen stetigen Homomorphismus $\widehat{\vartheta}\colon \widehat{G}_{\mathfrak{K}} \to \widehat{H}_{\mathfrak{K}}$ zwischen den entsprechenden pro-$\mathfrak{K}$-Vervollständigungen.

Folgern Sie: Die pro-$\mathfrak{K}$-Vervollständigung liefert einen kovarianten Funktor von der Kategorie der Gruppen in die Kategorie der pro-$\mathfrak{K}$-Gruppen.

Hinweis: Formulieren Sie zunächst präzise aus, was mit „kanonisch" gemeint ist.

(b) Sei $\vartheta\colon G \to H$ ein *surjektiver* Homomorphismus zwischen abstrakten Gruppen. Zeigen Sie: Dann ist $\widehat{\vartheta}\colon \widehat{G}_{\mathfrak{K}} \to \widehat{H}_{\mathfrak{K}}$ ebenfalls surjektiv.

(c) Sei $\vartheta\colon G \to H$ ein *injektiver* Homomorphismus zwischen abstrakten Gruppen. Beantworten Sie (mit Begründung): Ist $\widehat{\vartheta}\colon \widehat{G}_{\mathfrak{K}} \to \widehat{H}_{\mathfrak{K}}$ notwendigerweise ebenfalls injektiv?

(d) Sei $\vartheta\colon G \to H$ *surjektiv* wie in (b). Zeigen Sie, daß das kanonische Bild von $\mathrm{Kern}(\vartheta)$ in $\widehat{G}_{\mathfrak{K}}$ dicht in $\mathrm{Kern}(\widehat{\vartheta})$ liegt.

Bemerkung: Aus (b) und (d) folgt, daß der durch Vervollständigung beschriebene Funktor rechts-exakt im Sinne der Kategorientheorie ist.

Aufgabe 6.3

Sei G eine pro-endliche Gruppe, und sei $\widehat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \le \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(a) Seien $g \in G$ und $\lambda = (\lambda_n + n\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}} \in \widehat{\mathbb{Z}}$. Erläutern Sie: Der Grenzwert $g^\lambda \coloneqq \lim_{n\in\mathbb{N}} g^{\lambda_n}$ existiert in G und hängt, wie in der Notation bereits angedeutet, nur von g und λ ab.

(b) Zeigen Sie: Für $g \in G$ ist $\widehat{\mathbb{Z}} \to G$, $\lambda \mapsto g^\lambda$ ein stetiger Homomorphismus; insbesondere gilt also $g^{\lambda+\mu} = g^\lambda g^\mu$ für alle $\lambda, \mu \in \widehat{\mathbb{Z}}$.

(c) Zeigen Sie: Für alle $g \in G$ und $\lambda, \mu \in \widehat{\mathbb{Z}}$ gilt $\left(g^\lambda\right)^\mu = g^{\lambda\mu}$.

(d) Begründen Sie: Für $g, h \in G$ mit $gh = hg$ und $\lambda \in \widehat{\mathbb{Z}}$ gilt $(gh)^\lambda = g^\lambda h^\lambda$.

Bitte wenden!

Aufgabe 6.4 (4 Punkte)

Sei G eine residuell-endliche Gruppe mit pro-endlicher Vervollständigung $\widehat{G}$.

Zeigen Sie für $x, y \in G \leq \widehat{G}$: Die Elemente x und y sind konjugiert in $\widehat{G}$ genau dann, wenn xN und yN in jeder endlichen Faktorgruppe G/N von G konjugiert sind.

Zusätzliche Aufgabe 6.5

Ziel dieser Aufgabe ist es, die Aussage in Aufgabe 6.4 anhand eines konkreten Beispiels von B. A. F. Wehrfritz (1973) weiter zu verstehen. Betrachten Sie die Gruppe

$$G = \langle a, b, x, y \mid [a, b] = 1, a^x = a, b^x = a^2 b, a^y = a^2, b^y = b^2, [x, y] = 1 \rangle.$$

(a) Zeigen Sie: $A = \langle a^{\langle y \rangle} \rangle$ und $B = \langle b^{\langle y \rangle} \rangle$ sind jeweils isomorph zu der additiven Gruppe des Ringes der dyadischen rationalen Zahlen $\mathbb{Z}[1/2]$.

(b) Zeigen Sie: Es gilt $G = H \ltimes Q$ mit $H = \langle x, y \rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und $Q = \langle a^{\langle y \rangle} \cup b^{\langle y \rangle} \rangle = A \times B \trianglelefteq G$.

(c) Erläutern Sie: G ist endlich erzeugt, torsionsfrei, metabelsch und residuell-endlich.

(d) Zeigen Sie: Die Konjugationsklasse von b in G ist $b^G = \{a^{2^{n+1} m} b^{2^n} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$; insbesondere ist ab nicht konjugiert zu b.

(e) Zeigen Sie: Für jedes $N \trianglelefteq G$ mit $|G : N| < \infty$ ist abN konjugiert zu bN in G/N.

Hinweis: $Q/(Q \cap N)$ ist eine endliche Gruppe von ungerader Ordnung r. Betrachten Sie $a^{2t} b$ für $t = (r+1)/2$.

Fazit: Die Elemente ab und b sind in jedem endlichen Bild von G konjugiert zueinander, und damit auch in der pro-endlichen Vervollständigung $\widehat{G}$; aber in G sind sie dennoch nicht konjugiert.