Gruppentheorie II: Proendliche Gruppen – Blatt 7

Abgabe der Lösungen bis 02.06.2021 um 10.30 Uhr per E-Mail

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 7.2 und 7.5 ab, und bereiten Sie die übrigen Aufgaben für die Übungsstunde vor; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenII_SS21/`

Aufgabe 7.1

Sei p eine Primzahl und sei $K = \mathbb{F}_p$ ein Körper der Kardinalität p. Sei $\ell \neq p$ eine weitere Primzahl, und betrachte im algebraischen Abschluß $\overline{K}$ die Kette $K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots$ von endlichen Körpern, wobei $K_i = \{a \in \overline{K} \mid a^{p^{\ell^i}} - a = 0\}$ den eindeutigen Erweiterungskörper von K vom Grad $[K_i : K] = \ell^i$ bezeichnet.
Sei $L = \bigcup\{K_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ und $G = \mathrm{Aut}(L)$ die Automorphismengruppe des Körpers L. Schließlich sei $\varphi\colon L \to L$, $x \mapsto x^p$ der Frobeniusautomorphismus.

(a) Zeigen Sie: $L \,|\, K$ ist eine normale und separable algebraische Körpererweiterung, d. h., zu jedem Element $a \in L$ gibt es ein separables Polynom $f \in K[X]$ mit $f(a) = 0$, das zudem über L vollständig in Linearfaktoren zerfällt.

Bermerkung: Man sagt, $L \,|\, K$ sei eine (unendliche) *Galoissche Körpererweiterung*.

(b) Bestimmen Sie $\{a \in L \mid a^\varphi = a\}$, und zeigen Sie: $G = \{\alpha \in \mathrm{Aut}(L) \mid \alpha|_K = \mathrm{id}_K\}$.

Bemerkung: Man nennt G die *Galoisgruppe* zu der Galoisschen Erweiterung $L \,|\, K$.

(c) Konstruieren Sie einen Automorphismus $\psi \in G$ mit der Eigenschaft: $\psi|_{K_i} = \varphi^{m_i}$ mit $m_i = 1 + \ell + \ell^2 + \ldots + \ell^{i-1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

(d) Folgern Sie: $H = \langle \varphi \rangle$ ist eine echte Untergruppe von G; dennoch stimmen die zugehörgien Fixkörper $\{a \in L \mid \forall h \in H : a^h = a\}$ und $\{a \in L \mid \forall g \in G : a^g = a\}$ überein.

Bemerkung: Die Galoiskorrespondenz zwischen den Untergruppen der Galoisgruppe G und den Zwischenkörpern der Galoisschen Erweiterung $L \,|\, K$ ist also scheinbar gestört. Indem man auf G eine geeignete Topologie erklärt, läßt sich die Korrespondenz reparieren: G wird in natürlicher Weise eine pro-endliche Gruppe und es besteht eine bijektive Korrespondenz zwischen den *abgeschlossenen* Untergruppen von G und den Zwischenkörpern von $L \,|\, K$. Frage: Welche pro-endliche Gruppe erhält man wohl?

Aufgabe 7.2 (4 Punkte)

Sei $q = p^f$ eine Primzahlpotenz, und sei $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper der Kardinalität q mit algebraischem Abschluß $\overline{\mathbb{F}_q}$.
Zeigen Sie: Es gibt eine natürliche Bijektion $n \mapsto \mathbb{F}(n)$ zwischen der Menge der Steinitzzahlen und der Menge aller Zwischenkörper der Erweiterung $\overline{\mathbb{F}_q} \,|\, \mathbb{F}_q$, mit der gilt:

$$\mathbb{F}(m) \subseteq \mathbb{F}(n) \quad \longleftrightarrow \quad m \mid n \qquad \text{für alle Steinitzzahlen } m, n.$$

Hinweis: Erinnern Sie sich an die Beschreibung *endlicher* Körpererweiterungen von $\mathbb{F}_q$: Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ gibt es, innerhalb von $\overline{\mathbb{F}_q}$, genau einen Erweiterungskörper vom Grad m über $\mathbb{F}_q$; dieser Körper $\mathbb{F}_{q^m}$ ist der Zerfällungskörper des Polynoms $X^{q^m} - X \in \mathbb{F}_q[X]$ und $\mathbb{F}_{q^m} \smallsetminus \{0\}$ besteht gerade aus den $(q^m - 1)$ten Einheitswurzeln.

Bitte wenden!

Aufgabe 7.3

Sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie: $\mathsf{SL}_n(\widehat{\mathbb{Z}}) \cong \prod_{p\in\mathbb{P}} \mathsf{SL}_n(\mathbb{Z}_p)$.

(b) Sei $p \in \mathbb{P}$. Liegt $\mathsf{SL}_n(\mathbb{Z})$ dicht in $\mathsf{SL}_n(\mathbb{Z}_p)$? Gilt $\mathsf{SL}_n(\mathbb{Z}_p) \cong \widehat{\mathsf{SL}_n(\mathbb{Z})}_p$?
Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

Aufgabe 7.4

(a) Sei $G = \varprojlim_{i\in I} G_i$ der inverse Limes eines inversen Systems $(G_i, \varphi_{ij})_I$ von pro-endlichen Gruppen mit surjektiven Verbindungshomomorphismen $\varphi_{ij}\colon G_i \to G_j$ für $i, j \in I$ mit $i \geq j$.
Zeigen Sie: $|G| = \mathrm{kgV}(|G_i|)_{i\in I}$.

(b) Folgern Sie: Insbesondere gilt für jede Familie G_i, $i \in I$, von pro-endlichen Gruppen:

$$\Big|\prod_{i\in I} G_i\Big| = \prod_{i\in I} |G_i|.$$

Aufgabe 7.5 (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei $p \in \mathbb{P}$.

(a) Bestimmen Sie $|\mathsf{GL}_n(\mathbb{Z}_p)|$.

(b) Zeigen Sie für $p > 2$: $\mathbb{Z}_p$ enthält eine primitive $(p-1)$te Einheitswurzel ζ, und es gilt

$$\mathsf{GL}_1(\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p^\times = \langle\zeta\rangle \times \overline{\langle 1+p\rangle},$$

wobei $\langle\zeta\rangle \cong C_{p-1}$ und $\overline{\langle 1+p\rangle} \cong \mathbb{Z}_p$ sind.

(c) Bestimmen Sie explizit eine pro-p-Sylowuntergruppe von $\mathsf{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$.

(d) Zeigen Sie: $\mathsf{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ besitzt nur endlich viele pro-p-Sylowuntergruppen, aber für $n \geq 2$ zu jeder Primzahl ℓ mit $\ell \mid (p-1)$ überabzählbar unendlich viele pro-ℓ-Sylowuntergruppen.