Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Sommersemester 2021

Gruppentheorie II: Proendliche Gruppen – Blatt 8

Abgabe der Lösungen bis 09.06.2021 um 10.30 Uhr per E-Mail

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 8.1 und 8.5 ab, und bereiten Sie die übrigen Aufgaben für die Übungsstunde vor; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenII_SS21/`

Aufgabe 8.1 (4 Punkte)

Sei $n = \prod_p p^{n(p)}$ eine Steinitzzahl.

(a) Zeigen Sie: Die pro-endliche Gruppe $\widehat{\mathbb{Z}}$ besitzt genau eine Untergruppe $H \le_{\mathrm{abg}} \widehat{\mathbb{Z}}$ mit Index $|\widehat{\mathbb{Z}} : H| = n$; weiter ist $H \cong \prod_{p \in P} \mathbb{Z}_p$ für $P = \{p \in \mathbb{P} \mid n(p) < \infty\}$.

(b) Zeigen Sie: Bis auf Isomorphie gibt es genau eine pro-zyklische Gruppe G mit $|G| = n$.

Hinweis: Behandeln Sie zunächst den Fall, daß $n = p^\nu$, mit $\nu \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, eine Primzahlpotentz ist.

Aufgabe 8.2

(a) Sei $\varphi\colon G \to \widetilde{G}$ ein stetiger Homomorphismus zwischen pro-endlichen Gruppen, und sei $\pi \subseteq \mathbb{P}$ eine Menge von Primzahlen.

Zeigen Sie: Ist $H \le_{\mathrm{abg}} G$ eine pro-π-Halluntergruppe, so ist $H\varphi \le_{\mathrm{abg}} G\varphi$ ebenfalls eine pro-π-Halluntergruppe.

(b) Geben Sie ein konkretes Beispiel für eine endliche Gruppe G und eine Primzahlmenge $\pi \subseteq \mathbb{P}$ dergestalt, daß G keine π-Halluntergruppe besitzt.

Aufgabe 8.3

Seien G, H pro-endliche Gruppen. Zeigen Sie: Für die Frattiniuntergruppen gilt

$$\Phi(G \times H) = \Phi(G) \times \Phi(H).$$

Bemerkung: Für abstrakte Gruppen gilt die Formel im allgemeinen *nicht*. Woran könnte das liegen?

Aufgabe 8.4

Sei G eine pro-endliche Gruppe. Für $i \in \mathbb{N}$ bezeichne $\gamma_i G$ das i-te Glied der (abstrakten) absteigenden Zentralreihe von G und $\overline{\gamma_i G}$ dessen topologischen Abschluß.

(a) Zeigen Sie: G ist pronilpotent, d. h. isomorph zu einem inversen Limes von endlichen nilpotenten Gruppen, genau dann, wenn $\bigcap\{\overline{\gamma_i G} \mid i \in \mathbb{N}\} = 1$ gilt.

(b) Geben Sie ein konkretes Beispiel für eine pronilpotente Gruppe G mit trivialem Zentrum $\mathrm{Z}(G) = 1$.

Bitte wenden!

Aufgabe 8.5 (4 Punkte)

Bekanntlich sind für eine endliche Gruppe G folgende Aussagen paarweise äquivalent:

(i) G ist nilpotent, d. h., es gilt $\gamma_{c+1}G = 1$ für hinreichend große $c \in \mathbb{N}$.

(ii) Für jede Primzahl p besitzt G genau eine p-Sylowuntergruppe S_p, und diese ist ein Normalteiler $S_p \trianglelefteq G$.

(iii) $G = \prod_p S_p$ ist das direkte Produkt von p-Sylowuntergruppen S_p, wobei p die Primteiler von $|G|$ durchläuft.

(iv) Für jede echte Untergruppe $H \lneqq G$ ist $H \subsetneqq \mathrm{N}_G(H)$.

(Beweisen Sie diesen Sachverhalt ggf. noch einmal für sich selbst oder schauen Sie ggf. in der Literatur nach.)

Zeigen Sie nun: Für eine pro-endliche Gruppe G sind paarweise äquivalent:

(I) G ist pronilpotent.

(II) Für jede Primzahl p besitzt G genau eine pro-p-Sylowuntergruppe S_p, und diese ist ein Normalteiler $S_p \trianglelefteq_{\mathrm{abg}} G$.

(III) $G = \prod_p S_p$ ist isomorph zu dem cartesischen Produkt seiner pro-p-Sylowuntergruppen S_p, wobei p die Primteiler von $|G|$ durchläuft.

(IV) Für jede echte offene Untergruppe $H \lneqq_{\mathrm{off}} G$ ist $H \subsetneqq \mathrm{N}_G(H)$.

Zusätzliche Aufgabe 8.6

Sei p eine Primzahl mit $p > 2$. Betrachten Sie die pro-endliche Gruppe $G = \langle s \rangle \ltimes A$, wobei die Operation von $\langle s \rangle \cong C_2$ auf $A \cong \mathbb{Z}_p$ wie folgt gegeben sei: $a^s = a^{-1}$ für alle $a \in A$.

(a) Zeigen Sie: G läßt sich als inverser Limes von endlichen Diedergruppen darstellen.

(b) Bestimmen Sie zu jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der offenen Untergruppen $H \leq_{\mathrm{off}} G$ mit $|G : H| = n$.

(c) Verifizieren Sie: G besitzt keine offene pro-zyklische Untergruppe, die zentral in G ist.

Bemerkung: Das Beispiel ist relevant in Bezug auf den folgenden, ungleich schwieriger zu beweisenden Satz: Besitzt eine pro-p Gruppe G für fast alle $n \in \mathbb{N}_0$ höchstens p^n offene Untergruppen vom Index p^n, so gibt es in G bereits eine offene pro-zyklische Untergruppe, die zentral in G ist.