Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Sommersemester 2021

Gruppentheorie II: Proendliche Gruppen – Blatt 9

Abgabe der Lösungen bis 16.06.2021 um 8.30 Uhr in der Vorlesung oder per E-Mail

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 9.1 und 9.2 ab, und bereiten Sie die übrigen Aufgaben für die Übungsstunde vor; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenII_SS21/`

Aufgabe 9.1 (4 Punkte)

(a) Seien G und H endlich erzeugte proendliche Gruppen mit $\mathrm{ggT}(|G|,|H|) = 1$. Zeigen Sie, daß $d(G \times H) = \max(d(G), d(H))$ ist.

(b) Sei $d \in \mathbb{N}$, und seien p, q ungerade Primzahlen mit $p \equiv_q 1$. Konstruieren Sie eine endliche Gruppe G der Ordnung $p^d q$ mit den folgenden Eigenschaften: Jede Sylowuntergruppe von G läßt sich von d Elementen erzeugen, aber $d(G) = d + 1$.

Bemerkung: Unter Verwendung der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen läßt sich zeigen (Guralnick und Lucchini, jeweils unabhängig, 1989):
Für jede endliche Gruppe G gilt

$$d(G) \leq 1 + \max\{d(S) \mid S \text{ eine Sylowuntergruppe von } G\}.$$

(c) Bestimmen Sie konkret eine Familie $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$ endlicher Gruppen dergestalt, daß die proendliche Gruppe $\prod_{i \in \mathbb{N}} G_i$ endlich erzeugt, pronilpotent, aber nicht nilpotent ist.

(d) Sei G eine nicht-triviale endliche Gruppe, und für $i \in \mathbb{N}$ sei $G_i \cong G$, eine zu G isomorphe endliche Gruppe. Zeigen Sie: Die proendliche Gruppe $\prod_{i \in \mathbb{N}} G_i$ ist nicht endlich erzeugt.

Aufgabe 9.2 (4 Punkte)

Man nennt eine proendliche Gruppe G *hopfsch*, wenn jeder surjektive stetige Endomorphismus $\varphi\colon G \to G$ bereits ein Isomorphismus ist.

(a) Zeigen Sie: Jede endlich erzeugte proendliche Gruppe ist hopfsch.

(b) Geben Sie, mit Begründung, ein Beispiel für eine nicht-hopfsche proendliche Gruppe.

Aufgabe 9.3

Geben Sie, mit Begründung, ein Beispiel für eine abstrakte Gruppe, die keine maximalen Untergruppen besitzt.

Bitte wenden!

Aufgabe 9.4

Seien $H \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ und $K \leq \mathrm{Sym}(\Delta)$ Permutationsgruppen. Sei $\Sigma = \Omega \times \Delta$.

(a) Zeigen Sie: Für jedes $h \in H$ und $\delta \in \Delta$ ist

$$h(\delta)\colon \Sigma \to \Sigma, \quad \begin{cases} (\omega,\delta) \mapsto (\omega^h,\delta), & \\ (\omega,\tilde{\delta}) \mapsto (\omega,\tilde{\delta}) & \text{for } \tilde{\delta} \neq \delta \end{cases}$$

eine Permutation von Σ.

(b) Zeigen Sie: Für jedes $k \in K$ ist

$$k^*\colon \Sigma \to \Sigma, \quad (\omega,\delta) \mapsto (\omega,\delta^k)$$

eine Permutation von Σ.

(c) Das *Kranzprodukt* $G = H \wr K$ ist diejenige Untergruppe von $\mathrm{Sym}(\Sigma)$, die von den Elementen $h(\delta)$ und k^*, mit $h \in H$, $\delta \in \Delta$ und $k \in K$, erzeugt wird.
Zeigen Sie: $B = \langle h(\delta) \mid h \in H,\ \delta \in \Delta\rangle \trianglelefteq G$, und $B = \mathrm{Dr}_{\delta\in\Delta} H(\delta)$ ist das direkte Produkt der Untergruppen $H(\delta) = \{h(\delta) \mid h \in H\} \cong H$, $\delta \in \Delta$. Weiter gilt $G = T \ltimes B$, wobei $T = \{k^* \mid k \in K\} \cong K$ ist und T auf B, der Operation von K auf Δ entprechend, über „Koordinatenpermutationen“ wirkt.
Insbesondere gilt für Kranzprodukte endlicher Permutationsgruppen: $|G| = |K|\,|H|^{|\Delta|}$.

(d) Zeigen Sie: $D_8 \cong C_2 \wr C_2$ (als abstrakte Gruppen), wobei $C_2 \cong \mathrm{Sym}(2)$ als symmetrische Gruppe vom Grad 2 zu lesen ist.

(e) Sei p eine Primzahl und $m \in \mathbb{N}$. Sei

$$W = ((\cdots(C_p \wr C_p) \wr \ldots \wr C_p) \wr C_p) \wr C_p$$

das $m$fach iterierte Kranzprodukt von $C_p = \langle (1\,2\cdots p)\rangle \leq \mathrm{Sym}(p)$.
Zeigen Sie: W ist als Permutationsgruppe isomorph zu einer p-Sylowuntergruppe der symmetrischen Gruppe $\mathrm{Sym}(p^m)$.

(f) Zeigen Sie: $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$, wobei $\mathbb{Z} \leq \mathrm{Sym}(\mathbb{Z})$ per Rechtsaddition auf sich selbst operiere, ist eine endlich erzeugte, auflösbare Gruppe; jedoch besitzt $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ Untergruppen, die nicht mehr endlich erzeugt sind.