Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Sommersemester 2021

Gruppentheorie II: Proendliche Gruppen – Blatt 10

Abgabe der Lösungen bis 23.06.2021 um 8.30 Uhr in der Vorlesung oder per E-Mail

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 10.1 und 10.3 ab, und bereiten Sie die übrigen Aufgaben für die Übungsstunde vor; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenII_SS21/`

Aufgabe 10.1 (4 Punkte)

Sei G eine proendliche Gruppe.

(a) Zeigen Sie: Sind $M, N \trianglelefteq_{\text{abg}} G$ pronilpotent, so ist auch $MN \trianglelefteq_{\text{abg}} G$ pronilpotent.

(b) Zeigen Sie: G besitzt einen pronilpotenten Normalteiler, der alle pronilpotenten Normalteiler von G enthält.

(c) Beschreiben Sie möglichst genau den maximalen pronilpotenten Normalteiler N der proendlichen Gruppe $G = \mathsf{SL}_3(\widehat{\mathbb{Z}})$ sowie die zugehörige Faktorgruppe G/N.

Aufgabe 10.2

Seien Γ und Δ abstrakte Gruppen.

(a) Begründen Sie: Die endlichen Bilder von Γ sind (bis auf Isomorphie) genau die endlichen stetigen Bilder der proendlichen Vervollständigung $\widehat{\Gamma}$.

(b) Sei zusätzlich Γ endlich erzeugt. Zeigen Sie: Die Gruppen Γ und Δ haben (bis auf Isomorphie) dieselben endlichen Bilder genau dann, wenn ihre proendlichen Vervollständigungen $\widehat{\Gamma}$ und $\widehat{\Delta}$ isomorph sind.

Hinweis: Verwenden Sie (a) und ein geeignetes Resultat aus der Vorlesung.

(c) Belegen Sie durch ein konkretes Beispiel: Ohne die Voraussetzung, daß Γ endlich erzeugt ist, läßt sich die Aussage in (b) im allgemeinen nicht herleiten.

Aufgabe 10.3 (4 Punkte)

Sei p eine Primzahl.

(a) Zeigen Sie: Ist G eine endlich erzeugte abelsche pro-p-Gruppe und $H \leq_{\text{abg}} G$, so gilt $d(H) \leq d(G)$.

(b) Zeigen Sie: Jede endlich erzeugte abelsche pro-p-Gruppe ist isomorph zu einer Gruppe der Form $\mathbb{Z}_p^d \times E$ für geeignetes $d \in \mathbb{N}_0$ und eine endliche abelsche p-Gruppe E.

Hinweis: Wenn Sie die Theorie endlich erzeugter Moduln über Hauptidealringen kennen, können Sie ausnutzen, daß $\mathbb{Z}_p$ ein Hauptidealring ist. Alternativ können Sie wie bereits in Aufgabe 10.2 ein geeignetes Resultat aus der Vorlesung verwenden, um mit Hilfe der endlichen stetigen Bilder zu argumentieren.

Bitte wenden!

Aufgabe 10.4

Sei p eine Primzahl, und für $m \in \mathbb{N}$ sei $W_m = C_p \wr C_{p^m}$, wobei C_{p^m} als zyklische Untergruppe von $\mathrm{Sym}(p^m)$ verstanden wird.

(a) Zeigen Sie: Für $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$W_m = \langle x_m, y_m \mid x_m^{p^m} = y_m^p = [y_m, y_m^{x_m}] = [y_m, y_m^{x_m^2}] = \ldots = [y_m, y_m^{x_m^{p^m-1}}] = 1 \rangle.$$

Hinweis: Begründen und verwenden Sie: $|W_m| = p^{p^m+m}$.

(b) Bestimmen Sie geeignete natürliche Epimorphismen $\varphi_m \colon W_m \to W_{m-1}$, so daß sich ein inverses System $(W_m, \varphi_{m,n})_{\mathbb{N}}$ ergibt.

Zeigen Sie: Für den zugehörigen inversen Limes $W = \varprojlim_{m\in\mathbb{N}} W_m$ gilt $W = T \ltimes B$ mit $B \cong \prod_{n\in\mathbb{N}} C_p$ und $T \cong \mathbb{Z}_p$.

Bemerkung: Der inverse Limes $W = \varprojlim_{m\in\mathbb{N}} W_m$ ist das Kranzprodukt $C_p \hat{\wr} \mathbb{Z}_p$ in der Kategorie der pro-p-Gruppen.

(c) Zeigen Sie: Die pro-p-Gruppe $W \cong C_p \hat{\wr} \mathbb{Z}_p$ läßt sich von zwei Elementen erzeugen, besitzt aber abgeschlossene Untergruppen, die nicht mehr endlich erzeugt sind.

Bemerkung: Man kann sich weiter überlegen: Die pro-p-Gruppe $C_p \hat{\wr} \mathbb{Z}_p$ ist in der Kategorie der pro-p-Gruppen nicht endlich präsentierbar.

(d) Zeigen Sie: Die pro-p-Gruppe

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & (1+t)^\lambda \end{pmatrix} \;\middle|\; f \in \mathbb{F}_p[[t]],\ \lambda \in \mathbb{Z}_p \right\} \leq_{\mathrm{abg}} \mathsf{GL}_2(\mathbb{F}_p[[t]])$$

ist isomorph zu $W \cong C_p \hat{\wr} \mathbb{Z}_p$.

Hinweis: Betrachten Sie die Faktorgruppen G_m von G, die sich in natürlicher Weise durch Reduktion modulo t^{p^m} ergeben.