Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Sommersemester 2021

Gruppentheorie II: Proendliche Gruppen – Blatt 12

Abgabe der Lösungen bis 07.07.2021 um 8.30 Uhr in der Vorlesung oder per E-Mail

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 12.1 und 12.2 ab, und bereiten Sie die übrigen Aufgaben für die Übungsstunde vor; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenII_SS21/`

Aufgabe 12.1 (4 Punkte)

Nach Malcev (1940) bzw. Iwasawa (1943) gilt: Ist $\Gamma = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ eine freie (abstrakte) Gruppe von endlichem Rang n, so ist Γ für jede Primzahl p residuell eine endliche p-Gruppe, d.h., es ist

$$\bigcap \{\Delta \trianglelefteq \Gamma \mid \Gamma/\Delta \text{ eine endliche } p\text{-Gruppe}\} = 1.$$

Folgern Sie daraus für beliebiges (nicht notwendigerweise endliches!) X: Ist $\mathfrak{K}$ eine Klasse von endlichen Gruppen, die unter der Bildung von Untergruppen, Faktorgruppen und Gruppenerweiterung abgeschossen ist, besitzt $\mathfrak{K}$ zudem nicht-triviale Gruppen und ist F eine freie pro-$\mathfrak{K}$-Gruppe basierend auf $X \subseteq F$, so ist die (abstrakte) Gruppe $\Gamma = \langle X \rangle$ frei mit Basis $X \subseteq \Gamma$.

Hinweis: Verwenden Sie die Ihnen bekannte Konstruktion freier pro-$\mathfrak{K}$ Gruppen aus freien (abstrakten) Gruppen. Ist Γ eine freie (abstrakte) Gruppe mit Basis $X \subseteq \Gamma$ und ist

$$F = \widehat{\Gamma}_{\mathfrak{F}} \quad \text{mit} \quad \delta\colon \Gamma \to \widehat{\Gamma}_{\mathfrak{F}}$$

die Vervollständigung von Γ bzgl. der durch die Normalteilerfilterbasis $\mathfrak{F} = \{\Delta \trianglelefteq \Gamma \mid \Gamma/\Delta \text{ in } \mathfrak{K} \text{ und } |X \smallsetminus \Delta| < \infty\}$ erklärten Topologie, so ist F (bis auf Isomorphie) die freie pro-$\mathfrak{K}$-Gruppe basierend auf X mittels $\iota = \delta|_X\colon X \to F$.

Aufgabe 12.2 (4 Punkte)

Sei F eine freie proendliche Gruppe basierend auf $X \subseteq F$.

(a) Sei $Y \subseteq X$. Zeigen Sie: Die Gruppe $F_Y = \overline{\langle Y \rangle}$ ist eine freie proendliche Gruppe basierend auf Y.

(b) Sei $Y \subseteq X$. Sei $K = \overline{\langle x^g \mid x \in X \smallsetminus Y, g \in F \rangle} \trianglelefteq_{\text{abg}} F$ und $\pi\colon F \to F/K$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie: F/K ist eine freie proendliche Gruppe basierend auf Y mittels $\pi|_Y\colon Y \to F/K$.

(c) Zeigen Sie: F ist in natürlicher Weise der inverse Limes von freien proendlichen Gruppen mit jeweils endlicher Basis.

(d) Unter welchen der in der Vorlesung stufenweise erhöhten Anforderungen an eine Klasse $\mathfrak{K}$ von endlichen Gruppen verallgemeinern sich die Aussagen in (a), (b) und (c) jeweils von freien proendlichen Gruppen auf freie pro-$\mathfrak{K}$-Gruppen?

Bitte wenden!

Aufgabe 12.3
Sei p eine Primzahl und G eine endlich erzeugte pro-p-Gruppe mit

$$d(H) - 1 = (d(G) - 1)|G : H| \quad \text{für alle } H \le_{\text{off}} G.$$

Zeigen Sie: G ist eine freie pro-p-Gruppe.

Aufgabe 12.4
Sei G eine proendliche Gruppe. Ein *topologischer G-(Rechts-)Modul* M ist eine abelsche topologische Gruppe, auf der mittels einer stetigen Abbildung $M \times G \to M$ eine Modulstruktur definiert ist: Für $a, b \in M$ und $g, h \in G$ gelten

$$(a + b).g = a.g + b.g, \qquad a.(gh) = (a.g).h, \qquad a.1 = a.$$

Ein *proendlicher G-(Rechts-)Modul* ist der inverse Limes $M = \varprojlim_{i \in I} M_i$ eines inversen Systems $(M_i, \varphi_{ij})_I$ von endlichen diskreten topologischen G-Moduln M_i: Die zugehörige Modulstruktur ist durch die Abbildung $M \times G \to M$ gegeben, die mittels

$$(a.g)\varphi_i = (a\varphi_i).g \qquad \text{für } a \in M \text{ und } g \in G$$

definiert wird; hierbei bezeichnet $\varphi_i : M \to M_i$ für jedes $i \in I$ die kanonische Abbildung, die dem inversen Limes $M = \varprojlim_{i \in I} M_i$ implizit zugehört.

(a) Verifizieren Sie, daß ein inverser Limes von endlichen diskreten G-Moduln wie oben eingeführt tatsächlich eindeutig die Struktur eines topologischen G-Moduls trägt.

(b) Sei M ein (abstrakter) G-Modul und gleichzeitig eine abelsche proendliche Gruppe. Zeigen Sie, daß die folgenden Bedingungen paarweise äquivalent sind:

(i) M ist anhand der angegebenen algebraischen und topologischen Strukturen ein proendlicher G-Modul.

(ii) M ist anhand der angegebenen Strukturen ein topologischer G-Modul.

(iii) $\{N \mid N \le_{\text{off}} M \text{ ein } G\text{-Untermodul}\}$ bildet eine Umgebungsbasis für 0 in M.