Gruppentheorie II: Proendliche Gruppen – Blatt 13

Abgabe der Lösungen bis 14.07.2021 um 8.30 Uhr in der Vorlesung oder per E-Mail

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 13.1 und 13.2 ab, und bereiten Sie die übrigen Aufgaben für die Übungsstunde vor; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenII_SS21/`

Aufgabe 13.1 (4 Punkte)

Sei $\mathfrak{K}$ eine Klasse von endlichen Gruppen, die unter der Bildung von Untergruppen und direkten Produkten abgeschlossen ist. Sei X ein topologischer Raum.
Eine freie pro-$\mathfrak{K}$-Gruppe, basierend auf X, ist eine pro-$\mathfrak{K}$-Gruppe F zusammen mit einer stetigen Abbildung $\iota\colon X \to F$ dergestalt, daß es zu jeder stetigen Abbildung $\xi_0\colon X \to G$ in eine pro-$\mathfrak{K}$-Gruppe G genau einen stetigen Homomorphismus $\xi\colon F \to G$ mit $\xi_0 = \iota\xi$ gibt.

(a) Zeigen Sie: Es existiert eine freie pro-$\mathfrak{K}$-Gruppe, basierend auf X, und diese ist bis auf Isomorphie eindeutig.

Hinweis: Konstruieren Sie die freie pro-$\mathfrak{K}$-Gruppe aus einer freien (abstrakten) Gruppen Γ mit Basis $X \subseteq \Gamma$, indem Sie sich die Normalteilerfilterbasis

$$\mathfrak{F} = \{\Delta \trianglelefteq \Gamma \mid \Gamma/\Delta \text{ in } \mathfrak{K} \text{ und } \forall \gamma \in \Gamma : X \cap \gamma\Delta \subseteq_{\mathrm{off}} X\}$$

zu Nutze machen.

(b) Erläutern Sie, wieso diese Begriffsbildung das in der Vorlesung eingeführte Konzept (eingeschränkter) freier pro-$\mathfrak{K}$-Gruppen scheinbar verallgemeinert.

Aufgabe 13.2 (4 Punkte)

Sei G eine proendliche Gruppe.

(a) Zeigen Sie: Sind A, B topologische G-Moduln, so gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{H}^n(G, A \oplus B) \cong \mathrm{H}^n(G, A) \oplus \mathrm{H}^n(G, B).$$

(b) Erläutern Sie: Ist G projektiv und M ein proendlicher G-Modul, so gilt $\mathrm{H}^2(G, M) = 0$.

Aufgabe 13.3

Sei G eine proendliche Gruppe, M ein proendlicher G-Modul sowie $1 \to M \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} G \to 1$ eine zerfallende Erweiterung vom Typ (M, G).

(a) Zeigen Sie: Es gibt eine Bijektion zwischen $\mathrm{Der}(G, M)$ und der Menge aller Komplemente zu $M\iota$ in E.

(b) Zeigen Sie: Es gibt eine Bijektion zwischen $\mathrm{H}^1(G, M)$ und der Menge der Konjugationsklassen von Komplementen zu $M\iota$ in E.

(c) Folgern Sie: Ist $\mathrm{H}^1(G, M) = 0$, so sind je zwei Komplemente zu $M\iota$ in E konjugiert zueinander.

(d) Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$. Sei $G = \langle t \rangle \cong C_2$ und $M = \langle a \rangle \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, wobei $a.t = -a$ sei. Bestimmen Sie $\mathrm{Der}(G, M)$ sowie $\mathrm{H}^1(G, M)$. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit einer Liste aller Komplemente zu $\langle a \rangle$ in der Diedergruppe $D_{2m} = \langle a, t \mid a^m = t^2 = 1 \text{ und } a^t = a^{-1} \rangle$ sowie deren Einteilung in Konjugationsklassen.

Bitte wenden!

Aufgabe 13.4

Sei F eine freie proendliche Gruppe, basierend auf einer 1-konvergenten Menge $X \subseteq F$. Für eine Teilmenge $R \subseteq F$ bezeichne K_R den kleinsten abgeschlossenen Normalteiler von F der R enthält; das heißt,

$$K_R = \overline{\langle \{ r^g \mid r \in R,\, g \in F \} \rangle} \trianglelefteq_{\text{abg}} F.$$

Ist eine proendliche Gruppe G isomorph zur Faktorgruppe F/K_R, so sagt man G *ist präsentiert durch Erzeugende* X *und Relationen* R. Man schreibt kurz

$$G \cong \langle X \mid R \rangle \tag{$*$}$$

und nennt dies eine (*proendliche*) *Präsentation* von G. Eine Präsentation ($*$) heißt *endlich*, falls die Mengen X und R endlich sind. Existiert eine endliche Präsentation von G, dann nennt man G *endlich präsentierbar*.

(a) Finden Sie eine endliche Präsentation der proendlichen Gruppe $\mathbb{Z}_p$.

(b) Sei G eine endlich präsentierbare proendliche Gruppe. Zeigen Sie: Jede offene Untergruppe $H \leq_{\text{off}} G$ ist endlich präsentierbar.

(c) Zeigen Sie, daß jede endlich erzeugte, projektive proendliche Gruppe schon endlich präsentierbar ist.

Bemerkung: Insbesondere sind endlich erzeugte freie pro-p-Gruppen stets endlich präsentierbare proendliche Gruppen.