

Spezielle Themen der Algebra/Geometrie: Homotopietyptheorie – Blatt 12

Vorrechnen in der Übung am 24.1.2019

Aufgabe 1:

In der Vorlesung hatten wir betrachtet:

$$\text{LEM} := \forall(P : \mathcal{U}) \text{ isprop}(P) \rightarrow (P \vee \neg P)$$

$$\text{LDN} := \forall(P : \mathcal{U}) \text{ isprop}(P) \rightarrow (\neg \neg P \rightarrow P)$$

(Dabei ist, wie üblich, $\neg A := A \rightarrow \emptyset$ und $A \vee B := A + B$.)

In dieser Aufgabe soll $\text{LEM} \leftrightarrow \text{LDN}$ formal gezeigt werden. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- (a) „ \rightarrow “ stimmt allgemeiner: Geben Sie für beliebige $P : \mathcal{U}$ eine Abbildung

$$(P \vee \neg P) \rightarrow (\neg \neg P \rightarrow P)$$

an.

- (b) Für „ \leftarrow “: Zeigen Sie, zunächst, für beliebige $P : \mathcal{U}$:

$$\neg \neg (P \vee \neg P).$$

- (c) Zeigen Sie außerdem, für beliebige P :

$$\text{isprop}(P) \rightarrow \text{isprop}(P \vee \neg P)$$

Hinweis: Verwenden Sie das Induktionsprinzip für „ $+$ “.

- (d) Folgern Sie jetzt $\text{LEM} \leftrightarrow \text{LDN}$.

Aufgabe 2:

In der Vorlesung wurde $\|A\|$ definiert als $\neg \neg A$ und es wurde behauptet:

- (*) Sind $A, P : \mathcal{U}$ mit $\text{isprop}(P)$ und gilt $A \rightarrow P$, so gilt bereits $\|A\| \rightarrow P$.

Zeigen Sie genauer, dass (*) äquivalent ist zu LEM (und/oder zu LDN).