Spezielle Themen der Algebra/Geometrie: Homotopietyptheorie – Blatt 6

Vorrechnen in der Übung am 22.11.2019

Aufgabe 1:

(a) In der Vorlesung haben wir die Regeln (=-ELIM) und (=-COMP) (bezüglich $a =_A b$) nur informell gesehen. Schreiben Sie diese Regeln formal auf (mit einer Funktion $\mathbf{ind}_=$).

(b) Sei A ein fester Typ. Wir wollen zeigen, dass die einzigen Gleichheitszeugen, die existieren, die trivialen sind. Das formalisieren wir wie folgt: Wir definieren die Menge aller Gleichheitszeugen in A als $P(A) := \sum_{a:A} \sum_{b:A} a =_A b$. Zeigen Sie, dass „alle Elemente von $P(A)$ die Form $(a, (a, \mathrm{refl}_a))$ haben", also formaler:
(*) $\forall (p : P(A)) \, \exists (a : A) \, p =_{P(A)} (a, (a, \mathrm{refl}_a))$.
Hinweis: Zeigen Sie die Aussage „per Pfad-Induktion", d. h. konstruieren einen Zeugen von (*) mit Hilfe von (=-ELIM).

(c) Was haben wir in (b) bewiesen, wenn wir die Interpretation von Typen als topologische Räume verwenden? (Warum haben wir nicht bewiesen, dass alle Pfade trivial sind?)

Aufgabe 2:

Sei A ein Typ und $B \colon A \to \mathcal{U}$. Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass die Abbildung, die jedem a in A und jedem b in $B(a)$ das Element (a, b) in $\sum_{x:A} B(x)$ zuordnet, injektiv ist.

(a) Wir nehmen also an, dass, für $i = 1, 2$, a_i in A und b_i in $B(a_i)$ gegeben sind. Außerdem nehmen wir $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ an. Formulieren Sie all unsere Annahmen als ein Kontext Γ.

(b) Unter diesen Annahmen wollen wir zeigen: $a_1 =_A a_2 \wedge b_1 =_? b_2$... aber was sollte bei „?" stehen? Das funktioniert so nicht. Wie kann man diese Aussage statt dessen richtig formulieren?
Ein paar Hinweise:
- Wenn wir $a_1 =_A a_2$ annehmen (d. h. es ist also ein $p : a_1 =_A a_2$ gegeben), liefert uns dieses p auch eine Identifikation von $B(a_1)$ mit $B(a_2)$; damit lässt sich dann „$b_1 = b_2$" ausdrücken. (Wie?)
- Wir wollen jetzt also eine Konjunktion ausdrücken, bei der die zweite Aussage sich nur mit Hilfe eines Zeugen der ersten Aussage formulieren lässt. Erinnern Sie sich jetzt daran, dass $P \wedge Q$ als $P \times Q$ definiert ist, und dass $P \times Q$ ein Spezialfall einer allgemeineren Konstruktion ist, bei der Q von $p : P$ abhängen kann. Verwenden Sie diese Konstruktion, um die gesuchte „abhängige Konjunktion" zu formulieren.

(c) Beweisen Sie die Injektivität (in der in (b) formulierten Form).