Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 26.06.2019

Blatt 11

Übungen zur Komplexen Analysis

29. Zeigen Sie das Lemma von Hadamard: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig mit Sternpunkt 0 und sei $f \in C^\infty(U)$ mit $f(0) = 0$. Dann gibt es $g_j \in C^\infty(U)$, so dass
$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j g_j(x), \quad x \in U.$$
Hinweis: Betrachten Sie für $x \in U$ die Funktion $h(t) := f(tx)$, $t \in [0,1]$. Wenden Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auf h an, um $f(x)$ als Integral auszudrücken.

30. Sei $\Omega := \{z \in \mathbb{C} | 1 < |z| < 2\}$. Dann wird durch
$$U_1 := \left\{ re^{i\varphi} \middle| 1 < r < 2,\ -\frac{3}{4}\pi < \varphi < \frac{3}{4}\pi \right\},$$
$$U_2 := \left\{ re^{i\varphi} \middle| 1 < r < 2,\ \frac{1}{4}\pi < \varphi < \frac{7}{4}\pi \right\},$$
eine Überdeckung von Ω gegeben. Für $z \in U_1 \cap U_2$ sei
$$g_{1,2}(z) = -g_{2,1}(z) = \begin{cases} 0, & \operatorname{Im} z > 0, \\ 1, & \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$
Zeigen Sie, dass es $g_1 \in \mathcal{A}(U_1)$ und $g_2 \in \mathcal{A}(U_2)$ gibt, so dass $g_{1,2} = g_1 - g_2$.
Hinweis: Ω ist ein Holomorphiegebiet. Wir werden am 1. Juli in der Vorlesung sehen, dass das erste Cousinsche Problem in Ω stets lösbar ist. Sie sollen diese Aufgabe aber rein mit den Mitteln der Funktionentheorie bearbeiten.

31. Ω und U_1, U_2 seien wie in Aufgabe 2. Dieses Mal sei für $z \in U_1 \cap U_2$
$$g_{1,2}(z) = g_{2,1}(z) = \begin{cases} 1, & \operatorname{Im} z > 0, \\ -1, & \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$
Gibt es nullstellenfreie Funktionen $g_1 \in \mathcal{A}(U_1)$ und $g_2 \in \mathcal{A}(U_2)$, so dass $g_{1,2} = g_1/g_2$?

Besprechung: 1. Juli