Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 03.07.2019
Blatt 12

Übungen zur Komplexen Analysis

32. Geben Sie eine Prägarbe von Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ an, die keine Garbe ist.

    Hinweis: Als Funktionalanalytiker muss man da nicht lange suchen.

33. Es sei $\mathscr{F}$ eine Garbe auf Ω, es sei $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von Ω und es seien $C^r(\mathcal{U},\mathscr{F})$ die zugehörigen Räume von Coketten. Der Co-Randoperator ist definiert als

$$\delta\colon C^r(\mathcal{U},\mathscr{F}) \to C^{r+1}(\mathcal{U},\mathscr{F}),$$
$$(\delta f)(i_0,\ldots,i_{r+1}) \coloneqq \sum_{j=0}^{r+1} (-1)^j f\Big(i_0,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_{r+1}\Big),$$

    wobei der mit dem Dach versehene Index wegfällt.

    Die Garbe der holomorphen Funktionen werde mit $\mathcal{A}$ bezeichnet. Für $f \in C^1(\mathcal{U},\mathcal{A})$ definieren wir $g_{j,k} = f(j,k)$. Zeigen Sie, dass $\delta(f) = 0$ genau dann, wenn die $g_{j,k}$ die Kompatibilitätsbedingungen (a) und (b) des Cousin I Problems erfüllen.

34. Führen Sie den zweiten Fall im Beweis des Theorem 9.7 aus:

    (a) Es seien also Cousin II Daten $g_{j,k}$ zur Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ gegeben. Sei nun $(\widetilde{U}_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine Verfeinerung, welche aus Polyzylindern besteht; das bedeutet, dass es zu jedem $\alpha \in A$ ein $\rho(\alpha) \in I$ gibt, so dass $\widetilde{U}_\alpha \subset U_{\rho(\alpha)}$. Für α, β mit $\widetilde{U}_\alpha \cap \widetilde{U}_\beta \neq \emptyset$ definiert man

$$\widetilde{g}_{\alpha,\beta} \coloneqq g_{\rho(\alpha),\rho(\beta)}.$$

    Zeigen Sie, dass hierdurch Cousin II Daten für $(\widetilde{U}_\alpha)_{\alpha\in A}$ gegeben werden.

    (b) Nach Fall 1 ist das Cousin Problem für die $\widetilde{g}_{\alpha,\beta}$ lösbar. Die entsprechenden Funktionen sollen $\widetilde{g}_\alpha \in \mathcal{A}(\widetilde{U}_\alpha)$ heißen. Zeigen Sie, dass durch

$$g_i(z) \coloneqq \widetilde{g}_\alpha(z) g_{i,\rho(\alpha)}(z), \quad z \in U_i \cap \widetilde{U}_\alpha,$$

    ein Element $g_i \in \mathcal{A}(U_i)$ definiert wird.

    (c) Zeigen Sie, dass die g_i aus Teil (b) das ursprünglich gegebene Cousin II Problem lösen.

Besprechung: 8. Juli