Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Düsseldorf, den 16.04.2019
Blatt 3

Übungen zur Komplexen Analysis

1. Es sei $W \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, welches homöomorph zur Kugel $B_1(0)$ ist und es seien $f_1, \dots, f_k \in A(W)$. Falls
$$\Omega := \{z \in W | \forall j : |f_j(z)| < 1\}$$
relativ kompakt in W ist, so ist Ω ein *analytisches Polyeder.*
Zeigen Sie: Analytische Polyeder sind Holomorphiegebiete.

2. Für $0 < \rho_1 < \rho_2$ definieren wir einen zweidimensionalen *Reinhardt-Körper* durch
$$R_{\rho_1,\rho_2} := \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \middle| |z_1| < \rho_2, |z_2| < a_{\rho_1,\rho_2}(|z|_1)\right\},$$
wobei
$$a_{\rho_1,\rho_2}(r) := \begin{cases} \rho_2, & r < \rho_1, \\ \rho_1, & r \geq \rho_1. \end{cases}$$
   (a) Skizzieren Sie $R_{1,2} \cap \mathbb{R}^2$.
   (b) Sei $f \in A(R_{1,2})$, seien r_1, r_2 positive Zahlen mit $r := (r_1, r_2) \in R_{1,2}$ und sei
   $$M := \max_{z \in \overline{R_{r_1,r_2}}} |f(z)|.$$
   Zeigen Sie durch zweifache Anwendung der eindimensionalen Cauchyschen Abschätzungsformel, dass für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^2$
   $$\frac{1}{\alpha!} \left| \frac{\partial^\alpha f}{\partial z^\alpha}(0) \right| \leq \frac{M}{r^\alpha}.$$

3. Zeigen Sie in der Situation von Aufgabe 2, dass die Taylorreihe von f in $R_{\sqrt{2},\sqrt{2}}$ konvergiert. Der Reinhardt-Körper $R_{1,2}$ ist also kein Holomorphiegebiet, aber auch kein Hartogstopf.

Besprechung: 29. April