Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 30.04.2019

Blatt 4

Übungen zur Komplexen Analysis

8. Es sei X ein topologischer Raum und es sei $u\colon X \to [-\infty, \infty[$ eine nach oben beschränkte Funktion. Zeigen Sie, dass durch
$$u^*(x) := \limsup_{y \to x} u(y)$$
eine oberhalbstetige Funktion auf X gegeben wird.

9. Beispielsweise aus der Einführung in die partiellen Differentialgleichung wissen wir, dass für eine stetige Funktion $f \in C(\partial B_\rho(0))$ die Lösung des zweidimensionalen Dirichlet-Problems
$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, && \text{in } B_\rho(0), \\ u &= f, && \text{in } \partial B_\rho(0), \end{aligned}$$
gegeben wird durch
$$u(x) = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{\partial B_\rho(0)} \frac{\rho^2 - |x|^2}{|x-y|^2} f(y)\, \mathrm{d}\sigma(y).$$
Es seien nun $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $u\colon \Omega \to [-\infty, \infty[$ subharmonisch und $\overline{B}_r(z) \subset \Omega$. Zeigen Sie
$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\varphi})\, \mathrm{d}\varphi.$$

10. Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $u\colon \Omega \to [-\infty, \infty[$ subharmonisch und $z_0 \in \Omega$. Ferner sei $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine positive Nullfolge, so dass $\overline{B}_{r_n}(z) \subset \Omega$ für jedes n. Zeigen Sie
$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + r_n e^{i\varphi})\, \mathrm{d}\varphi = u(z).$$

Besprechung: 6. Mai