Nachtrag zu

5.1 Determinanten

K Körper

Satz 5.1.13 (Cramersche Regel): Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$.

(a) Sei $A_{(k,l)} := \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,l-1} & a_{1,l} & a_{1,l+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{k-1,1} & & & & & & \\ a_{k,1} & & & & & & a_{k,n} \\ a_{k+1,1} & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & & a_{n,l} & \cdots & & a_{n,n} \end{pmatrix}$

sei $c_{k,l} := (-1)^{k+l} \det A_{(k,l)}$

und sei $C := (c_{k,l})_{1\leq k,l\leq n}$

Dann gilt: $C^T \cdot A = \det(A) \cdot I_n$

Insbesondere gilt, falls A invertierbar ist: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C^T$.

(b) Ist A invertierbar und $b \in K^n$, so gilt für die eindeutige Lösung von $Ax = b$: $\quad (x = (x_1, \dots, x_n))$

$$x_l = \frac{\det A_l}{\det A},$$ wobei A_l aus A entsteht, indem man die l-te Spalte durch b ersetzt:

$$A_l = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,l-1} & b_1 & a_{1,l+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & & b_n & & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$A_{11} = (a_{22})$ $\qquad c_{11} = (-1)^{1+1} \cdot a_{22} = a_{22}$

$A_{12} = (a_{21})$ $\qquad c_{12} = -a_{21}$

$c_{21} = -a_{12}$

$c_{22} = a_{11}$

Also: $C^T = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

<u>Bem:</u> Ist $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ invertierbar und $\det A = \pm 1$, so ist auch $A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, und für $b \in \mathbb{Z}^n$ hat „$Ax = b$" eine Lösung in $\mathbb{Z}^n$.

<u>Bew:</u> Sei $A \in K^{n\times n}$. Für $b \in K^n$ und $1 \leq l \leq n$ sei $A[l,b]$ die Matrix, die man aus A erhält, indem man die l-te Spalte durch b ersetzt.

Bestimme $\det A[l,b]$ mit Laplace-Entwicklung nach der l-ten Spalte:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,l-1} & b_1 & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,l-1} & b_n & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$\det A[l,b] = b_1 \cdot \underbrace{(-1)^{1+l} \det A_{(1,l)}}_{c_{1,l}} + b_2 \cdot \underbrace{(-1)^{2+l} \det A_{(2,l)}}_{c_{2,l}} + \ldots$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_{k,l} \cdot b_k$$

$$C^T b = \begin{pmatrix} \det A[1,b] \\ \vdots \\ \det A[n,b] \end{pmatrix}$$

(a) * Sei b die l-te Spalte von A. Dann:

$$\det \underbrace{A[l,b]}_{A} = \det A$$

Falls $l' \neq l$: $\det \underbrace{A[l',b]} = 0$

In dieser Matrix sind die l-te und die l'-te Spalte gleich.

Also insges: $$C^T b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \det A \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow l\text{-te Stelle}$$

$$= \det A \cdot e_l \qquad e_l = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow l$$

Also: $C^T \cdot \underbrace{A e_l}_{l\text{-te Spalte von } A} = \det A \cdot e_l$ ... für jedes l.

Also: $C^T A = \det A \cdot I_n$

(b) $A_l = A[l,b]$. Also: $C^T \cdot b = \begin{pmatrix} \det A_1 \\ \vdots \\ \det A_n \end{pmatrix}$

Die Lösung von $Ax = b$ ist:

$$x = A^{-1} b = \frac{1}{\det A} \cdot C^T b = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} \det A_1 \\ \vdots \\ \det A_n \end{pmatrix}$$

Also: $x_l = \dfrac{\det A_l}{\det A}$. $\square$