Lineare Algebra II

6.4 Bilinear- und Sesquilinearformen

Def. 6.4.1: Sei K ein Körper und V ein K-VR

(a) Eine Bilinearform auf V ist eine Abb. $\beta: V \times V \longrightarrow K$, so dass für alle $v, v', w, w' \in V$ und alle $r \in K$ gilt:

$$\beta(rv + v', w) = r \cdot \beta(v, w) + \beta(v', w)$$
$$\beta(v, rw + w') = r\,\beta(v, w) + \beta(v, w')$$

(b) β heißt symmetrisch, wenn für alle $v, w \in V$ gilt:

$$\beta(v, w) = \beta(w, v).$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\beta(rv, rw) \neq r\beta(v,w) \\ &\text{wäre wahr falls } \beta \text{ linear} \\ &\beta(rv, rw) = r\,\beta(v, rw) \\ &\qquad = r^2 \beta(v, w) \end{aligned}}$$

Def 6.4.2: Sei V ein $\mathbb{C}$-VR.

(a) Eine Sesquilinearform auf V ist eine Abb. $\beta: V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$, so dass für alle $v, v', w, w' \in V$ und alle $r \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\beta(rv + v', w) = r \cdot \beta(v, w) + \beta(v', w)$$
$$\beta(v, rw + w') = \overline{r}\,\beta(v, w) + \beta(v, w')$$

(b) β heißt hermitesch, wenn für alle $v, w \in V$ gilt:

$$\beta(v, w) = \overline{\beta(w, v)}.$$

Motivation:

Quadratische Gleichungen in mehreren Var.:

$$a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c \cdot x \cdot y + d \cdot x + e \cdot y + f = 0$$
$$\cancel{x^2 y}$$

Lösungsmenge davon?

- Durch Verschieben (ersetze x durch $x+u$, y durch $y+v$) werden (meistens) „$d \cdot x$" und „$e \cdot y$" los.

Bleibt: $ax^2 + by^2 + c'xy + c'yx + f = 0$
(für $c' = \frac{c}{2}$)

$\beta\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = a x_1 x_2 + b y_1 y_2 + c' x_1 y_2 + c' y_1 x_2$
ist symmetrische Bilinearform.

$\beta\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = -f$

Lemma 6.4.3: (a) Ist $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V (K-VR) und ist $a_{ij} \in K$ für $i, j \in I$, so existiert genau eine Bilinearform $\beta : V \times V \to K$, so dass $\beta(v_i, v_j) = a_{ij}$ gilt für alle $i, j \in I$.

(b) Ist $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V ($\mathbb{C}$-VR) und ist $a_{ij} \in \mathbb{C}$ für $i, j \in I$, so existiert genau eine Sesquilinearform $\beta : V \times V \to \mathbb{C}$, so dass $\beta(v_i, v_j) = a_{ij}$ gilt für alle $i, j \in I$.

Bew: (a) Sind a_{ij} gegeben, so definiere $\beta\left(\sum_i r_i v_i, \sum_j s_j v_j\right) := \sum_{i,j} r_i s_j a_{ij}$

Diese Rechnung zeigt: $\beta(v_i, v_j)$ legt ganz β fest.

$$\beta\left(\sum_i r_i v_i, \sum_j s_j v_j\right) = \sum_i r_i \, \beta\left(v_i, \sum_j s_j v_j\right) = \sum_i \sum_j r_i s_j \, \beta(v_i, v_j)$$

(Prüfe, dass das wirklich eine Bilinearform ist.)

(b) Analog. □

Ab jetzt sei $\mathbb{K}$ entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und V sei ein euklidischer bzw. unitärer $\mathbb{K}$-VR.

(Bsp: $V = \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ mit std-Skalarprodukt.)

Satz 6.4.4: Ist $f \in \mathrm{End}(V)$, so ist $\beta_f : V \times V \to \mathbb{K}$, $(v, w) \mapsto \langle v, f(w) \rangle$ eine Bilinearform bzw. Sesquilinearform, und zu jeder Bilinearform bzw. Sesquilinearform $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ existiert genau ein $f \in End(V)$, so dass $\beta = \beta_f$ ist.

Bew: Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ analog):

- β_f ist sesquilinear:

$$\beta_f(rv+v', w) \overset{?}{=} r \cdot \beta_f(v,w) + \beta_f(v',w)$$
$$\langle rv+v', f(w)\rangle = r \cdot \langle v, f(w)\rangle + \langle v', f(w)\rangle$$

$$\beta_f(v, rw+w') \overset{?}{=} \bar{r} \cdot \beta_f(v,w) + \beta_f(v,w')$$
$$\langle v, f(rw+w')\rangle \quad \bar{r}\langle v, f(w)\rangle + \langle v, f(w')\rangle$$
$$= \langle v, rf(w) + f(w')\rangle$$

- Existenz und Eindeutigkeit von f zu gegebenem β:

Wähle ONB $(v_i)_{i \in I}$ von V (d.h. $\langle v_i, v_i\rangle = 1$, $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ falls $i \neq j$)

Zu $a_{ij} \in \mathbb{C}$ $i,j \in I$ existiert genau eine Bil. β mit $\beta(v_i, v_j) = a_{ij}$

Müssen also prüfen: zu solchen a_{ij} existiert genau ein f, so dass

$$\beta_f(v_i, v_j) = a_{ij}$$
$$\langle v_i, f(v_j)\rangle$$

Nach 6.2.4 haben $f(v_j) = \sum_i \underbrace{\langle f(v_j), v_i\rangle}_{\overline{a_{ij}}} v_i$

Für festes j legen die a_{ij} $(i \in I)$ das Bild $f(v_j)$ fest.

Alle a_{ij} zusammen legen also genau die Bilder $f(v_j)$ der Basis v_j fest.

Nach Satz 4.2.6. ex. genau ein f, so dass $f(v_j) = \sum_i \overline{a_{ij}} v_i$ ist für alle j. $\square$

Konkret in $V = \mathbb{R}^n$: $\beta(v,w) = \langle v, Aw\rangle = v^T A w$

Als nächstes möchte beschreiben, wann β symmetrisch ist.

Nämlich: Wenn $A = A^T$ (bzw. $A = \overline{A}^T$ über $\mathbb{C}$)

Satz 6.4.5: Sei V endl-dim.

Zu jedem $f \in End(V)$ existiert genau ein $g \in End(V)$, so dass für alle $v, w \in V$ gilt: $\langle f(v), w \rangle = \langle v, g(w) \rangle$

Def 6.4.6: (a) Das g aus 6.4.5 nennt man die zu f adjungierte Abb.;

Notation dafür: f^*

(b) f heißt selbstadjungiert, wenn gilt: $f = f^*$.

Bew von 6.4.5: • Falls $V = \mathbb{C}^n$ (mit std-Skal-Prod):

f gegeben durch eine Matrix A. Gesucht ist eine Matrix B (von g) s.d. gilt: $\langle Av, w \rangle = \langle v, Bw \rangle$

$$\begin{array}{ccc} \langle Av, w \rangle & = & \langle v, Bw \rangle \\ \| & & \| \\ (Av)^T \cdot \overline{w} & & v^T (\overline{Bw}) \\ \| & & \| \\ v^T A^T \overline{w} & & v^T \overline{B}\, \overline{w} \end{array}$$

Also: Eindeutiges solches B ist $B = \overline{A^T}$.

Eindeutigkeit verwendet Satz 6.4.4: Anderes B würde andere Sesquilinearform liefern

• $V = \mathbb{R}^n$: Analog.

• V beliebig: Wende 6.2.7 an um V durch $\mathbb{K}^n$ zu ersetzen.