6.5 Orthogonale Komplemente

V euklidischer / unitärer $\mathbb{K}$-VR

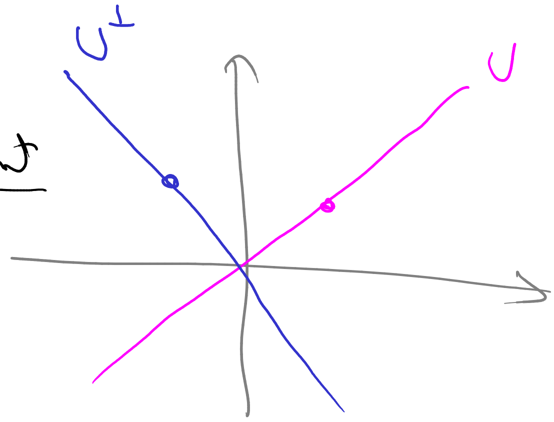
Def 6.5.1: Das orthogonale Komplement einer UVR $U \subseteq V$ ist

$$U^\perp := \{v \in V \mid \forall u \in U : v \perp u\}$$

Für $u \in V$ schreibt man

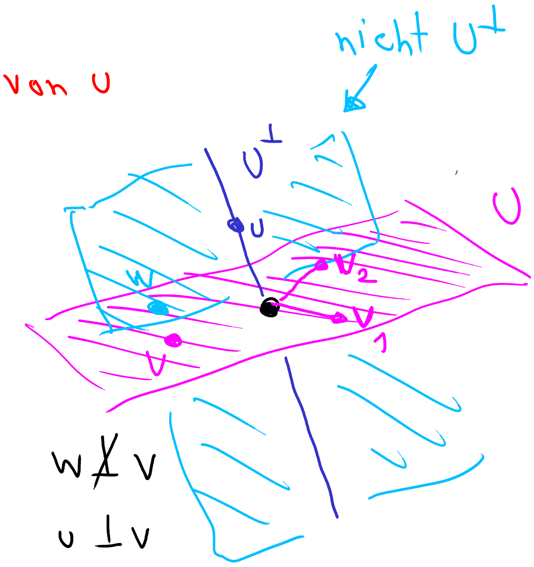
$$u^\perp := \{v \in V \mid v \perp u\} = \langle u \rangle_{\mathbb{K}}^\perp$$

span von u



Bem: $\{0\}^\perp = V$

$V^\perp = \{0\}$



$w \not\perp v$

$u \perp v$

v_1, v_2 ONB von U

u ONB von $U^\perp$

v_1, v_2, u ONB von V.

Satz 6.5.2: Sei $U \subseteq V$ ein UVR. Dann gilt:

(a) $U^\perp$ ist ein UVR von V mit $U \cap U^\perp = \{0\}$

(b) $U \subseteq (U^\perp)^\perp$

Ist V endlich-dim, so gilt außerdem:

(c) Ist $u_1, \dots, u_m$ eine ONB von U und $w_1, \dots, w_n$ eine ONB von $U^\perp$, so ist $u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n$ eine ONB von V.

Insbes.: $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$

(d) $U = (U^\perp)^\perp$

Bew: (a) $U^\perp$ ist UVR: $v, v' \perp \underset{\in U}{u} \Rightarrow \langle v, u\rangle = 0, \langle v, u'\rangle = 0$

$\Rightarrow \langle r \cdot v + v', u\rangle = 0$

$\Rightarrow rv + v' \perp u$

$U \cap U^\perp = \{0\}$: Aus $v \in U \cap U^\perp$ folgt: $\langle v, v\rangle = 0$

$\Downarrow$

$v = 0$

(b) $u \in U$. z.z: $\forall w \in U^\perp : u \perp w$ (nach Def von $(U^\perp)^\perp$)

Das folgt aus Def von $U^\perp$

(c) Sei $u_1, \dots, u_m$ ONB von U.

Für $w \in V$ gilt: $w \in U^\perp \Leftrightarrow \forall u \in U: \langle w, u \rangle = 0$

$\Leftrightarrow \langle w, u_1 \rangle = 0 \wedge \dots \wedge \langle w, u_n \rangle = 0$

„$\Leftarrow$": $u = \sum r_i u_i$

$\langle w, u \rangle = \sum r_i \langle w, u_i \rangle = 0$

Setze $f: V \longrightarrow \mathbb{K}^m$

$$w \longmapsto \begin{pmatrix} \langle w, u_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle w, u_m \rangle \end{pmatrix}$$

Das ist eine lin. Abb. und $U^\perp = \ker f$.

$$\operatorname{rang} f = \dim(\underbrace{\operatorname{im} f}_{\text{UVR von } \mathbb{K}^m}) \leq m = \dim U$$

$$\operatorname{rang} f = \dim V - \underbrace{\dim(\ker f)}_{= \dim U^\perp}$$

Also: $\dim V \leq \dim U + \dim U^\perp$

da $U \cap U^\perp = \{0\}$; nach 3.5.3

$$\dim V \geq \dim(U + U^\perp) = \dim(U) + \dim(U^\perp)$$

$$\Longrightarrow \dim V = \dim U + \dim U^\perp$$

Wähle noch ONB $w_1, \dots, w_n$ von $U^\perp$

Klar: $u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n$ sind eine ONB von $U + U^\perp = V$

(d) $\dim((U^\perp)^\perp) = \dim V - \underbrace{\dim U^\perp}_{= \dim V - \dim U} = \dim U$

Zusammen mit (b) folgt (d) $\square$