6.6 Der Spektralsatz und Folgerungen

Nachträgliche Änderungen sind gelb markiert.

Sei V euklidischer / unitärer $\mathbb{K}$-VR

Def. 6.6.1: $f \in \mathrm{End}(V)$ heißt <u>normal</u>, wenn $f \circ f^* = f^* \circ f$
(„f und f^* kommutieren")

Bsp 6.6.2: (a) f orthogonal bzw. unitär $\Rightarrow$ f normal

$\Updownarrow$

$\langle v, w \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle$

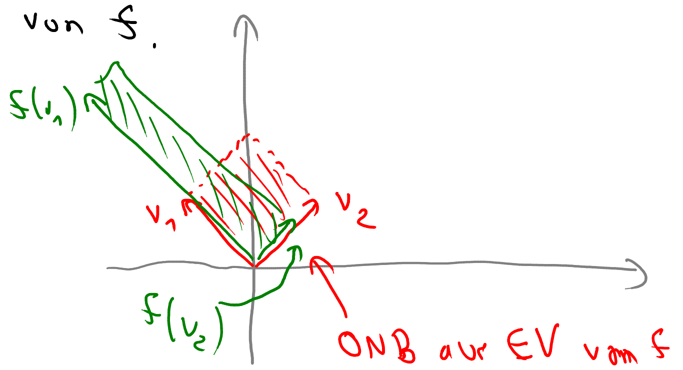
<u>Bew:</u> O.E. ist $V = \mathbb{K}^n$, f durch Matrix A gegeben.

A unitär $\Leftrightarrow$ $A^T = \bar{A}^{-1}$

zu prüfen:
$$\underbrace{A \underbrace{\bar{A}^T}_{=A^{-1}}}_{=I_n} \overset{?}{=} \underbrace{\underbrace{\bar{A}^T}_{=A^{-1}} A}_{=I_n}$$
$$I_n = I_n$$

(b) f selbstadjungiert $\Rightarrow$ f normal
$(f \circ f^* = f \circ f = f^* \circ f)$

Satz 6.6.3 (Spektralsatz für normale Endomorphismen über $\mathbb{C}$):
Sei V ein endl.-dim. unitärer $\mathbb{C}$-VR und $f \in \mathrm{End}(V)$. Dann:
f ist normal $\Leftrightarrow$ V besitzt eine ONB aus Eigenvektoren von f.



Satz 6.6.4 (Spektralsatz für normale Endomorphismen über $\mathbb{R}$):
Sei V ein endl.-dim. euklidischer $\mathbb{R}$-VR und $f \in \mathrm{End}(V)$. Wir nehmen an:
$(*)$ $\left\{ \text{Für jeden UVR } U \subseteq V \text{ mit } U \neq \{0\} \text{ und mit } f(U) \subseteq U \text{ gilt: } f|_U \text{ hat mindestens einen Eigenwert.} \right.$ Dann:

f ist normal $\Leftrightarrow$ V besitzt eine ONB aus Eigenvektoren von f.

Bew 6.6.3 + 6.6.4:

„$\Leftarrow$" O.E. $V = \mathbb{K}^n$; sei A die Matrix zu f.

Sei $S \in \mathbb{K}^{n \times n}$ die Matrix, deren Spalten die ONB aus EV sind. Also

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} =: D \qquad \lambda_i \text{ EW von } A.$$

$$A = S D S^{-1}$$

Spalten von S sind ONB
$\Updownarrow$
S orthogonal
$\Updownarrow$
$\bar{S}^T = S^{-1}$

$$A \bar{A}^T \overset{?}{=} \bar{A}^T A$$

$$A \bar{A}^T = S D S^{-1} \cdot \underbrace{\overline{S D S^{-1}}^T}_{\underbrace{(\bar{S}^{-1})^T}_{= S} \bar{D}^T \underbrace{\bar{S}^T}_{= S^{-1}}} = S D \cancel{S^{-1} S} \bar{D}^T S^{-1} = S \underbrace{D \bar{D}^T} S^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \bar{\lambda}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \bar{\lambda}_n \end{pmatrix}$$

$$\bar{A}^T A = S \bar{D}^T S^{-1} S D S^{-1} = S \underbrace{\bar{D}^T D} S^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \bar{\lambda}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \bar{\lambda}_n \end{pmatrix}$$

„$\Rightarrow$" Induktion über $\dim V$:

<u>Ind-Anfang:</u> Falls $V = \{0\}$: Nichts zu tun.
(Die ONB ist das leere Tupel.)

<u>Ind-Schritt:</u> Wir zeigen die Aussage für $\dim V = n \geq 1$:

- Wähle einen Eigenwert λ von f. Der existiert ....

..., im Fall $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ (6.6.3):

Die EW sind die NSt des char. Polynoms χ_f

χ_f hat Grad $n = \dim V$, ist also nicht konstant.

Nach 2.3.10 besitzt χ_f eine NSt.

... im Fall $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ (6.6.4)

EW existiert nach Annahme (*)

- $W := \{w \in V \mid f(w) = \lambda w\} = \ker(f - \lambda \cdot \mathrm{Id}_V)$

  W ist ein UVR von V

  Wähle ONB $w_1, \dots, w_k$ von W.

- (Δ) Setze $U := W^\perp$. Nach 6.5.2 brauche nur noch eine ONB $u_1, \dots, u_m$ von U aus EV von f zu finden. Dann bilden $w_1, \dots, w_k, u_1, \dots, u_m$ die gesuchte ONB.

- Dazu möchte zeigen: (1) $f(U) \subseteq U$.

- Zeige dazu zunächst: (2) $f^*(W) \subseteq W$

- <u>Bew von (2):</u> Z.z.: Für $w \in W$: $f(f^*(w)) \overset{?}{=} \lambda \cdot f^*(w)$

da f normal

$$f(f^*(w)) = f^*(f(w)) = f^*(\lambda w) = \lambda \cdot f^*(w)$$

$f(w) = \lambda w$

- <u>Bew von (1):</u> <u>Z.z.:</u> $\forall\, u \in U$: $f(u) \in U$

$$\Updownarrow$$

$\forall w \in W$: $f(u) \perp w$

$$\Updownarrow$$

$$\langle f(u), w\rangle \overset{?}{=} 0$$

$$\| $$

$$\langle u, \underbrace{f^*(w)}_{\in W}\rangle$$

Da $u \in U = W^\perp$ folgt: $\dots = 0$

- (1) bedeutet: Erhalte $f|_U \in \mathrm{End}(U)$.

  Wende die Ind-Voraussetzung auf $f|_U$ an.

  Prüfe dafür: • $\dim U < \dim V$ ✓

  • $f|_U$ ist normal

- Im Fall $\mathbb{K}=\mathbb{R}$: (*) gilt für U, da es für V gilt.
  (und $f(U)\subseteq U$)

Erhalte ONB von U aus EV von f. Fertig nach (Δ) $\square$

Korollar 6.6.5 (Hauptachsentransformation für selbstadjungierte Endomorphismen):
Sei V endl.-dim und $f\in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert. Dann existiert eine ONB von V aus EV von f und alle Eigenwerte von f sind reell.

über $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$

Bew: Fall $\mathbb{K}=\mathbb{C}$:

- Wende 6.6.3 an; erhalte ONB. Bleibt z.z.: Die EW sind reell.
- Sei also λ ein EW von f und v ein zugehöriger EV, d.h.

$$f(v)=\lambda v$$

$$\begin{aligned}\langle v, f(v)\rangle &= \langle v,\lambda v\rangle = \bar\lambda\langle v,v\rangle\\ &\| \\ \langle f^*(v),v\rangle &\\ \text{da } f \text{ selbst-adj} \longrightarrow &\| \\ \langle f(v),v\rangle &= \langle \lambda v, v\rangle = \lambda\langle v,v\rangle\end{aligned}$$

$\Rightarrow \bar\lambda=\lambda$ (da $\langle v,v\rangle\neq 0$)

$\Rightarrow \lambda$ reell.

Fall $\mathbb{K}=\mathbb{R}$:

- O.E. $V=\mathbb{R}^n$ (nach 6.2.7)
- Sei $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrix zu f. Erhalte aus dieser Matrix auch ein $f_{\mathbb{C}}\in\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$
- f selbstadj $\Leftrightarrow A=A^T \Leftrightarrow A=\bar A^T \Leftrightarrow f_{\mathbb{C}}$ ist selbst-Adj.

  da A nur reelle Einträge hat
- Wende den $\mathbb{C}$-Fall von 6.6.5 auf $f_{\mathbb{C}}$ an.

  Habe Basis aus EV, d.h.

$$A = S^{-1}\cdot \underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}}_{D} S$$

invertierbar; die Spalten sind die Basisvektoren.

$$\chi_A = \det(A - x\cdot I_n) = \det(S^{-1}DS - x\cdot I_n)$$
$$= \det(S^{-1}DS - S^{-1}xI_nS)$$
$$= \det(S^{-1}(D - xI_n)S)$$
$$\overset{5.1.10}{=} \det(D - xI_n) = \chi_D$$
$$\det\begin{pmatrix} \lambda_1 - x & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n - x \end{pmatrix}$$
$$= (\lambda_1 - x)\cdot\ldots\cdot(\lambda_n - x)$$

- Also: Habe gezeigt: $f \in End(V)$ selbst-adj $\Rightarrow f$ hat EW.
- Ist $U \subseteq V$ ein UVR mit $f(U) \subseteq U$, so ist $f|_U \in End(U)$ selbst-adj.; obiges auf $f|_U$ anwenden zeigt: $f|_U$ hat EW.
- Also habe (*) gezeigt. Also kann 6.6.4 anwenden. □

Korollar 6.6.6 (Hauptachsentransformation für symmetrische Bilinearformen bzw. hermitesche Sesquilinearformen):

Sei V endl.-dim und $\beta: V \times V \to \mathbb{K}$ eine symm. Bil.-Form bzw. hermitesche Sesquilinearform. Dann existiert eine ONB $v_1, \ldots, v_n$ von V so dass gilt:

$$\beta(v_i, v_j) = 0 \quad \text{falls } i \neq j$$
$$\beta(v_i, v_i) \in \mathbb{R}$$

Bew:
- Schreibe β als $\beta(v,w) = \langle v, f(w)\rangle$ für ein $f \in End(V)$ (mit 6.4.4)
- f ist selbst-adj (nach 6.4.9)
- 6.6.5 liefert ONB $v_1, \ldots, v_n$ aus EV von f. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die entsprechenden EW (d.h. $f(v_i) = \lambda_i v_i$).
- $\beta(v_i, v_j) = \langle v_i, f(v_j)\rangle = \langle v_i, \lambda_j v_j\rangle = \bar{\lambda}_j \langle v_i, v_j\rangle$

$$\begin{cases} = 0 & \text{falls } i \neq j \\ = \underset{\in \mathbb{R}}{\bar{\lambda}_i} & \text{falls } i = j \end{cases} \quad (\text{da ONB})$$

□

Anwendung auf quadratische Formen / Quadriken:

Das kann man meist loswerden. Siehe Tutorium vom 19.4.

Geg.: Gleichung der Form $\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{ij} x_i x_j \boxed{+ \sum b_i x^i} = c$

Bsp: $3x^2 + 2xy + 4y^2 + 7x + 9y - 11 = 0$

Wie kann die Lösungsmenge davon aussehen?

Betrachte $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{ij} x_i x_j$

quadratische Form

$= \beta\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)$ für eine symm. Bil.-Form β

$q(x,y) = 3x^2 + 2xy + 4y^2$

$\beta\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = 3x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4y_1y_2$

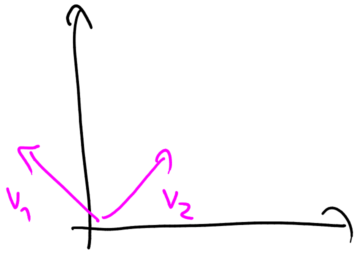
$|| $

$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Finde ONB $v_1, \dots, v_n$ wie in 6.6.6.

Sei $n=2$ (der Einfachheit halber):



- Aus 6.6.6 folgt:

$$q(z_1v_1 + z_2v_2) = \beta(z_1v_1 + z_2v_2, z_1v_1 + z_2v_2) = z_1^2 \beta(v_1, v_1) + z_2^2 \beta(v_2, v_2)$$

$\Rightarrow M := \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mid q(z_1v_1 + z_2v_2) = c \right\}$ ist eine Ellipse oder eine Hyperbel oder eine Doppelgerade oder leer.

- Da die Abbildung $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \longmapsto z_1v_1 + z_2v_2$ eine orthogonale Transformation ist (mit der Matrix $(v_1 | v_2)$), ist die gesuchte Lösungsmenge $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid q(x_1, x_2) = c \right\}$ eine gedrehte Version von M.

Das hab ich neu geschrieben. Details dazu im Tutorium vom 19.4.

Satz 6.6.7: Eine hermitesche Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte positiv sind.

Erinnerung: $v^T A \bar{v} > 0$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$

Bew: „$\Rightarrow$" Ann. λ ist EW von A, $\lambda \leq 0$. Sei v ein zugehöriger EV, $w := \bar{v}$

$$w^T A \bar{w} = \bar{v}^T A v = \bar{v}^T \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda \, \bar{v}^T v = \lambda \underbrace{w^T \bar{w}}_{>0} \leq 0$$

Also A nicht pos. def.

„$\Leftarrow$" • Erst mal Spezialfall:

$$(\square) \left\{ \begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i > 0 \\ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \neq 0 \qquad v^T A \bar{v} = (v_1, \dots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \bar{v}_n \end{pmatrix} \\ = \lambda_1 \underbrace{v_1 \bar{v}_1}_{=|v_1|^2 \geq 0} + \dots + \lambda_n \underbrace{v_n \bar{v}_n}_{=|v_n|^2 \geq 0} > 0 \end{array} \right.$$

nicht alle $= 0$

• Allgemeiner Fall:

$$6.6.5 \Rightarrow \quad A = S^{-1} D S$$

D: Diag-Matrix, S: unitäre Matrix, d.h. $S^{-1} = \bar{S}^T$

$$v^T A \bar{v} = \underbrace{v^T S^{-1}}_{= v^T \bar{S}^T = (\bar{S} v)^T} D \underbrace{S \bar{v}}_{= \overline{\bar{S} v}} \qquad w := \bar{S} v$$

$$= w^T D \bar{w} > 0 \text{ nach Spezialfall.} \qquad \square$$

Satz 6.6.8 (Sylvesters Trägheitssatz): Sei V ein endl.-dim. $\mathbb{R}$-VR und $\beta: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Dann existiert eine Basis $v_1, \dots, v_n$ von V, so dass gilt:

$$(*) \left\{ \begin{array}{ll} \beta(v_i, v_j) = 0 & \text{falls } i \neq j \\ \beta(v_i, v_i) \in \{-1, 0, 1\} & \end{array} \right.$$

Außerdem sind die Anzahlen

$$\#\{i \mid \beta(v_i,v_i)=1\}$$
$$\#\{i \mid \beta(v_i,v_i)=0\}$$
$$\#\{i \mid \beta(v_i,v_i)=-1\}$$

durch β festgelegt.

Nach Basiswechsel hat β die Form:

$$\beta\left(\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots \\ x_n'\end{pmatrix}\right) = a_1 x_1 x_1' + \dots + a_n x_n x_n'$$

$a_i \in \{-1, 0, 1\}$

Bew: • Existenz der Basis:

- Nach 6.6.6. ex. Basis w_i mit $\beta(w_i,w_j)=0$ für $i\neq j$
- Setze $v_i := \frac{1}{\sqrt{|\beta(w_i,w_i)|}} \cdot w_i$ falls $\beta(w_i,w_i)\neq 0$; sonst $v_i := w_i$
- Dann gilt: • $\beta(v_i, v_j)=0$ für $i\neq j$

  • Falls $\beta(w_i,w_i)\neq 0$:
  $$\beta(v_i,v_i) = \left(\frac{1}{\sqrt{|\beta(w_i,w_i)|}}\right)^2 \cdot \beta(w_i,w_i) = \underbrace{\frac{\beta(w_i,w_i)}{|\beta(w_i,w_i)|}}_{\in\{1,-1\}}$$

  • Falls $\beta(w_i,w_i)=0$, $\beta(v_i,v_i)=0$

• Eindeutigkeit: Wir zeigen die Eindeutigkeit von „$\#1$“ $:= \#\{i \mid \beta(v_i,v_i)=1\}$. Für -1 geht's analog.

Dann ist auch „$\#0$“ festgelegt, nämlich „$\#0$“ $= n -$ „$\#1$“ $-$ „$\#-1$“.

• Beh: „$\#1$“ $=$ maximale Dimension eines UVR $U\subseteq V$, so dass gilt: $\forall u \in U\setminus\{0\}: \beta(u,u)>0$ (Δ)

Zeige dazu: Ist $v_1,\dots,v_n$ eine Basis von V mit $(*)$:

(i) so existiert ein $U\subseteq V$ mit $\dim U = \#1$ und (Δ)

(ii) ex. kein $U'\subseteq V$ mit $\dim U' > \#1$ und (Δ)

(i) $U := \langle v_i \mid \beta(v_i,v_i)=1\rangle_{\mathbb{R}}$

span

$\dim U =$ „$\#1$“

(Δ) Gleiche Rechnung wie $(\square)$

(ii) $W := \langle v_i \mid \beta(v_i, v_i) \le 0 \rangle_{\underset{\text{span}}{\mathbb{R}}}$ $\qquad \dim W = \text{"}\#0\text{"} + \text{"}\#-1\text{"} = n - \text{"}\#1\text{"}$

Rechnung wie (□) liefert:

Für $w \in W$ gilt: $\beta(w,w) \le 0$

Ann: $U' \subseteq V$ ist ein UVR mit (△)

Dann $U' \cap W = \{0\}$

$$\Rightarrow \underbrace{\dim(U' + W)}_{\le n} = \dim U' + \dim W$$

$$\Rightarrow \dim U' \le n - \dim W = n - (n - \text{"}\#1\text{"}) = \#1 \quad \square$$

Anwendung auf quadratische Formen:

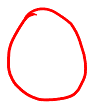
Gegeben: $q(x_1, \dots, x_n) = \sum a_{ij} x_i x_j$ (alles über $\mathbb{R}$)

Gesucht: $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \; q(x_1, \dots, x_n) = 1 \right\}$ „Quadrik"

6.6.8 besagt: Nach Basiswechsel hat q die Form

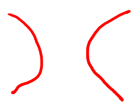
$$q(x_1 \dots, x_n) = a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2 \quad \text{mit } a_i \in \{-1, 0, 1\}$$

Falls $n=2$ habe also nur: $x_1^2 + x_2^2 = 1$



$x_1^2 = 1$

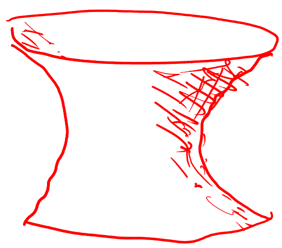
$x_1^2 - x_2^2 = 1$



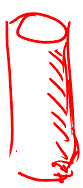
$$\left.\begin{array}{r} 0 = 1 \\ -x_2^2 = 1 \\ -x_1^2 - x_2^2 = 1 \end{array}\right\} \emptyset$$

Falls $n=3$: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

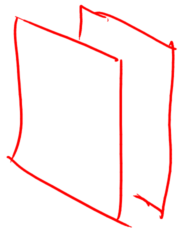
$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$



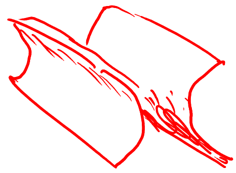
$x_1^2 + x_2^2 = 1$



$x_1^2 = 1$



$x_1^2 - x_3^2 = 1$



$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1$

Rst: $\emptyset$