7.3 Die Hauptraumzerlegung

K Kp, V endl.-dim. K-VR, $f \in \operatorname{End}(V)$.

Def. 7.3.1: Ein UVR $U \subseteq V$ heißt <u>f-invariant</u>, wenn $f(U) \subseteq U$ gilt. Ist dies der Fall, so kann $f|_U$ als Endomorphismus von U aufgefasst werden.

Lemma 7.3.2: (a) Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so dass für alle $N' \geq N$ gilt:

$$\operatorname{im} f^N = \operatorname{im} f^{N'}$$
$$\ker f^N = \ker f^{N'}$$

Für ein solches N gilt:

(b) $V = \operatorname{im} f^N \oplus \ker f^N$

(c) Ist $g \in \operatorname{End}(V)$ mit $g \circ f = f \circ g$, so sind $\ker f^N$ und $\operatorname{im} f^N$ g-invariant.

Bsp:

$$\begin{array}{ccc}
\ker f^0 = \{0\} & & \operatorname{im} f^0 = V \\
\rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\supsetneq$} \\
\ker f^1 & & \operatorname{im} f^1 \\
\rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\supsetneq$} \\
\ker f^2 & \oplus & \operatorname{im} f^2 = V \\
\| & & \| \\
\ker f^3 & & \operatorname{im} f^3 \\
\| & & \| \\
\ker f^4 & & \operatorname{im} f^4 \\
\| & & \| \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

Bew: (a) • Habe $\operatorname{im} f^0 \supseteq \operatorname{im} f^1 \supseteq \operatorname{im} f^2 \supseteq \ldots$

Sei $d := \min\{\dim \operatorname{im} f^i \mid i \in \mathbb{N}\}$

Sei N so, dass $\dim \operatorname{im} f^N = d$. Dann gilt $\dim \operatorname{im} f^{N'} = \dim \operatorname{im} f^N$ für $N' \geq N$, also $\operatorname{im} f^{N'} = \operatorname{im} f^N$.

• Habe $\ker f^0 \subseteq \ker f^1 \subseteq \ker f^2 \subseteq \ldots$

Sei $d := \max\{\dim \ker f^i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Dieses Maximum existiert, da $\dim \ker f^i \leq \dim V$ für alle i.

Dann analog zu oben.

(b) Habe: $\dim \operatorname{im} f^N = \operatorname{rk} f^N = \dim V - \dim \ker f^N$.

• Bleibt z.z.: $\operatorname{im} f^N \cap \ker f^N = \{0\}$.

(Dann folgt $\dim(\operatorname{im} f^N + \ker f^N) = \dim V$, also $\operatorname{im} f^N + \ker f^N = V$)

• $f(\operatorname{im} f^N) = \operatorname{im} f^{N+1} \underset{\text{nach Wahl von } N}{=} \operatorname{im} f^N$

Also: $f|_{\operatorname{im} f^N} \in \operatorname{End}(\operatorname{im} f^N)$ ist surjektiv und damit auch injektiv.

- $\Rightarrow f^N|_{\mathrm{im} f^N} \in \mathrm{End}(\mathrm{im} f^N)$ ist injektiv.
- $\Rightarrow \ker f^N \cap \mathrm{im} f^N = \{0\}$

(c) <u>$\ker f^N$ ist g-invariant:</u>

z.z: $g(\ker f^N) \subseteq \ker f^N$

Wähle also $v \in \ker f^N$. z.z: $g(v) \in \ker f^N$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{f(\cdots(f}_{N\text{ mal}}(g(v))\cdots) \overset{?}{=} 0$$

$$\|$$

$$g(\underbrace{f(\cdots f}_{N\text{ mal}}(v))\cdots) = g(f^N(v))$$

$$= g(0) = 0$$

<u>$\mathrm{im} f^N$ ist g-invariant:</u>

- z.z: $v \in \mathrm{im} f^N \overset{?}{\Rightarrow} g(v) \in \mathrm{im} f^N$

$$\Downarrow$$

- $v = f^N(v')$ für ein $v' \in V$
- $g(v) = g(f^N(v')) = f^N(g(v')) \in \mathrm{im} f^N$. $\square$

<u>Def 7.3.3</u>: • Sei $\lambda \in K$. Der <u>Eigenraum</u> von f zum Eigenwert λ ist <u>$\mathrm{Eig}_\lambda(f)$</u> $:= \ker(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)$

• Der <u>Hauptraum</u> von f zum Eigenwert λ ist <u>$\mathrm{Hau}_\lambda(f)$</u> $:= \ker(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^N$ für N hinreichend groß (im Sinne von Lemma 7.3.2 (a)).

Falls $v \neq 0$:
v ist EV
$\Leftrightarrow f(v) = \lambda v$
$\Leftrightarrow (f - \lambda \mathrm{id})v = 0$

<u>Bem 7.3.4</u>: Die obige Def macht für beliebige λ Sinn, aber es gilt:

$$\lambda \text{ ist EW von } f \Leftrightarrow \mathrm{Eig}_\lambda(f) \neq \{0\}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{Hau}_\lambda(f) \neq \{0\}$$

$\overset{\wedge}{*}$

Bem: Falls $V = \mathrm{Eig}_{\lambda_1}(f) + \ldots + \mathrm{Eig}_{\lambda_n}(f)$ ist, so existiert eine Basis von V aus Eigenvektoren, also ist f diagonalisierbar.

Falls $\mathrm{Eig}_\lambda(f) = \{0\}$, ist $f - \lambda \mathrm{id}_V$ inv'bar, also auch $(f-\lambda \mathrm{id}_V)^N$ inv'bar, also $\mathrm{Hau}_\lambda(f) = \{0\}$

Def 7.3.5: Wir nennen einen Körper K algebraisch abgeschlossen, wenn jedes nicht-konstante Polynom $f \in K[X]$ mindestens eine Nullstelle (in K) besitzt.

Bem. 7.3.6: Der Fundamentalsatz der Algebra (2.3.10) besagt genau, dass $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist.

Zu jedem Körper K existiert ein algebraisch abgeschlossener Körper L mit $K \subseteq L$.

$\overset{!!}{}$ alg. abg.

Satz 7.3.7 (Hauptraumzerlegung): Ist K alg. abg. und sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die Eigenwerte von f, so gilt

$$V = \mathrm{Hau}_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Hau}_{\lambda_r}(f)$$

Lemma 7.3.8: Seien $\lambda, \lambda' \in K$ und $g := f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V$ und $H := \mathrm{Hau}_{\lambda'}(f)$.

Dann gilt: (a) H ist g invariant (d.h. $g(H) \subseteq H$) und

(b1) $\underset{\underset{\mathrm{End}(H)}{\cap}}{g|_H}$ ist entweder ein Automorphismus von H falls $\lambda \neq \lambda'$

(b2) oder nilpotent falls $\lambda = \lambda'$.

Bew: (a) Nach Lemma 7.3.2 reicht es z. z., dass g und $g' := f - \lambda' \cdot \mathrm{id}_V$ kommutieren, d.h. $g \circ g' \overset{?}{=} g' \circ g$

$$g \circ g' = (f - \lambda \cdot \mathrm{id}) \circ (f - \lambda' \cdot \mathrm{id}) = f^2 - \underbrace{(\lambda \cdot \mathrm{id}) \circ f}_{= \lambda \cdot (\mathrm{id} \circ f) = \lambda \cdot f} - \underbrace{f \circ (\lambda' \mathrm{id})}_{\lambda' \cdot f} + \underbrace{(\lambda \cdot \mathrm{id}) \circ (\lambda' \cdot \mathrm{id})}_{\lambda \lambda' \cdot \mathrm{id}} = f^2 - \lambda f - \lambda' f + \lambda \cdot \lambda' \cdot \mathrm{id}$$

(b2) $\lambda = \lambda' \Rightarrow g = g'$, d.h. $H = \ker (g')^N = \ker g^N$

Also: $v \in H \iff g^N(v) = 0$ Also: $(g|_H)^N = 0$, also g nilpotent.

(b1) Für $v \in H$ gilt: $g(v) = f(v) - \lambda \cdot v$

$g'(v) = f(v) - \lambda' \cdot v$

Also: $g(v) = g'(v) + \lambda' v - \lambda v = g'(v) + (\lambda' - \lambda) v$

Also: $g|_H = \underbrace{g'|_H}_{\text{nilpot nach (b2)}} + \underbrace{(\lambda' - \lambda)}_{\neq 0, \text{ da } \lambda' \neq \lambda} id_H$

Also $g|_H$ invertierbar nach 7.2.7. $\square$

Bew. 7.3.7: Zeige als erstes: $V = Hau_{\lambda_1}(f) + \dots + Hau_{\lambda_r}(f)$:

- Induktion über $\dim V$.

  Falls $\dim V = 0$: nichts zu tun.

  Sei jetzt $\dim V \geq 1$:

- Wähle einen Eigenwert λ_1 von f.

  (Da $\dim V \geq 1$, ist χ_f nicht konstant, also hat es mind. eine NSt. λ_1, da K alg. abg.)

- Wende 7.3.2 (b) auf $g := f - \lambda_1 id_V$ an und erhalte:

  $V = \underbrace{\operatorname{im} g^N}_{=: U} \oplus \underbrace{\ker g^N}_{Hau_{\lambda_1}(f)}$ (*)

- $f^2 - \lambda_1 f$

  Da $f \circ g = g \circ f$ ist U f-invariant, also habe $f|_U \in End(U)$.

  Da $Hau_{\lambda_1}(f) \neq \{0\}$, ist $\dim U = \dim V - \dim Hau_{\lambda_1}(f)$

  $< \dim V$

  Also nach Ind. $U = Hau_{\lambda_2}(f|_U) + \dots + Hau_{\lambda_r}(f|_U)$

  Habe $Hau_{\lambda_i}(f) \supseteq Hau_{\lambda_i}(f|_U)$

  Also $U \subseteq Hau_{\lambda_2}(f) + \dots + Hau_{\lambda_r}(f)$

  Mit (*) folgt: $V = Hau_{\lambda_1}(f) + \dots + Hau_{\lambda_r}(f)$

- Bleibt z.z., dass die Summe direkt ist, d.h. nach 7.1.2 reicht es zu zeigen:

  | Ist $v_i \in Hau_{\lambda_i}(f)$ für $i=1,\dots,r$ mit $v_1+\dots+v_r=0$,
  | so ist bereits $v_1=\dots=v_r=0$

- Seien also solche v_i gegeben. Wir nehmen an, dass nicht alle $v_i=0$ sind. Wir nehmen an, dass $\underset{\ell}{\underset{\shortparallel}{\#\{i \mid v_i \neq 0\}}}$ minimal ist. (0)

  Bem: $\ell \geq 2$ $\qquad Hau_{\lambda_i}(f) = \ker g^N$

- Wähle i s.d. $v_i \neq 0$. und betrachte $g := f - \lambda_i \, id$.

  Habe $v_1 + \dots + v_r = 0 \implies g^N(v_1 + \dots + v_r) = 0$

  $$g^N(v_1+\dots+v_r) = \underset{v_1'}{\underset{\shortparallel}{g^N(v_1)}} + \dots + \underset{v_r'}{\underset{\shortparallel}{g^N(v_r)}}$$

- Falls $j=i$: $g^N(v_j) = 0$
- Falls $j \neq i$: Wende 7.3.8 an mit $\lambda' = \lambda_j$ und $\lambda = \lambda_i$:
  - $Hau_{\lambda_j}(f)$ ist g-invariant, d.h. $g^N(v_j) \in Hau_{\lambda_j}(f)$
  - $g^N(v_j) \neq 0$

- Also: $v_j' \in Hau_{\lambda_j}(f)$: Und: $v_j' = 0$ gdw $v_j = 0$ oder $j=i$

- $v_1' + \dots + v_r' = 0$ ist also eine kürzere Summe, die $=0$ ist, also $\lightning$ zur Minimalitätsannahme (0)

$\square$