7.4 Die Jordansche Normalform

Sei K alg. abg., V ein endl.-dim. K-VR und $f \in \mathrm{End}(V)$

<u>Satz 7.4.1 (Jordansche Normalform):</u> Es existiert ein Isomorphismus $g: K^n \to V$ $(n = \dim V)$, so dass die Matrix von $g^{-1} \circ f \circ g$ die folgende Form hat:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda_1 & 1 & & 0\\ & \lambda_1 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_1\end{matrix}}\Big\}{\scriptstyle r_1\times r_1} & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix}\lambda_2 & 1 & & 0\\ & \lambda_2 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_2\end{matrix}}\Big\}{\scriptstyle r_2\times r_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{\begin{matrix}\lambda_\ell & 1 & & 0\\ & \lambda_\ell & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_\ell\end{matrix}}\Big\}{\scriptstyle r_\ell\times r_\ell} \end{pmatrix}$$

wobei $\lambda_i \in K$ und $r_i \geq 1$ sind.

Hierbei sind die Paare $(\lambda_1, r_1), \dots, (\lambda_\ell, r_\ell)$ bis auf Reihenfolge eindeutig durch f festgelegt.

(Ist $r_i = 1$, so ist der zugehörige Block $\boxed{\lambda_i}$)

JNF

<u>Def 7.4.2:</u> Die obige Matrix nennt man die <u>jordansche Normalform</u> von f. Eine Matrix dieser Form nennt man auch „in jordanscher Normalform". Die $r_i \times r_i$-Blöcke nennt man <u>Jordan-Blöcke</u>.

<u>Bem 7.4.3:</u> Für Matrizen $A \in K^{n\times n}$ besagt Satz 7.4.1: Es existiert ein $S \in GL_n(K)$, so dass $S^{-1}AS$ in jordanscher Normalform ist. Anders ausgedrückt: Jede Matrix ist zu einer Matrix in JNF

ähnlich.

<u>Bem:</u> Satz 7.4.1 kann auch ausgedrückt werden als:

Ex. Basis $v_{1,1}, \dots, v_{1,r_1}, v_{2,1}, \dots, v_{2,r_2}, \dots, v_{\ell,1}, \dots, v_{\ell,r_\ell}$ von V

s.d.: $f(v_{i,1}) = \lambda_i \cdot v_{i,1}$ für $1 \leq i \leq \ell$

$f(v_{i,j}) = \lambda_i \cdot v_{i,j} + v_{i,j-1}$ für $1 \leq i \leq \ell$, $j \geq 2$

<u>Bew(7.4.1):</u> <u>Existenzaussage:</u>

- Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ die Eigenwerte von f. Nach 7.3.7 ist

$$V = \underbrace{\mathrm{Hau}_{\lambda_1}(f)}_{=:H_1} \oplus \dots \oplus \underbrace{\mathrm{Hau}_{\lambda_s}(f)}_{=:H_s}$$

- Für jedes i:
  - $h_i := (f - \lambda_i \mathrm{id})|_{H_i} \in \mathrm{End}(H_i)$
  - h_i ist nilpotent. Nach 7.2.4 ex. Basis $(v_{i,j})_j$ von H_i s.d.

$$h_i(v_{i,j}) = 0 \quad \text{oder} = v_{i,j-1} \quad \text{für alle } j$$

  - $\Rightarrow f(v_{i,j}) = h(v_{i,j}) + \lambda_i \cdot v_{i,j} = \begin{cases} \lambda_i v_{ij} & \text{oder} \\ \lambda_i v_{ij} + v_{i,j-1} \end{cases}$

- Alle v_{ij} zusammen bilden also eine Basis der gesuchten Form (anders nummeriert).

- <u>Eindeutigkeit:</u>
- Annahme: Habe eine Basis $(v_{ij})_{i \leq s, j \leq d_i}$ von V und $\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_s}_{\text{paarweise verschieden}} \in K$ so dass gilt:

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} \lambda_i v_{ij} & \text{oder} \\ \lambda_i v_{ij} + v_{i,j-1} \end{cases}$$

- Setze $h_i := f - \lambda_i \mathrm{id}$. Dann ist $h_i^N(v_{i,j}) = 0$ für N hinreichend groß. Also ist $v_{i,j} \in \mathrm{Hau}_{\lambda_i}(f)$.
  Da $V = \mathrm{Hau}_{\lambda_1}(f) \oplus \dots \oplus \mathrm{Hau}_{\lambda_s}(f)$ folgt:
  $(v_{ij})_j$ ist eine Basis von $\mathrm{Hau}_{\lambda_i}(f)$. Insbes. $d_i = \dim \mathrm{Hau}_{\lambda_i}(f)$

- Da $h_i(v_{ij}) = 0$ oder $= v_{i,j-1}$ für alle j hat $h_i|_{\mathrm{Hau}_{\lambda_i}(f)}$ bzgl. der Basis $(v_{ij})_j$ die Form $\begin{pmatrix} 0 & \bullet & & & \\ & 0 & \bullet & & 0 \\ & & 0 & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & \bullet \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \bullet \in \{0,1\}$

  also wie in Satz 7.2.4,
  also sind die Block-Größen eindeutig durch $h_i|_{\mathrm{Hau}_{\lambda_i}(f)}$ festgelegt.
  Diese Blöcke von $h_i|_{\mathrm{Hau}_{\lambda_i}(f)}$ entsprechen genau den Blöcken von f mit λ_i auf der Diagonalen. Also sind auch diese Blöcke festgelegt. $\square$

<u>Bem 7.4.4:</u> Die JNF von f lässt sich wie folgt bestimmen:

- Bestimme die EW $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ von f (NSt. von χ_f)
- Bestimme die Blockgrößen vom nilpotenten Endomorphismus $(f - \lambda_i \, id)|_{\mathrm{Hau}_{\lambda_i}(f)} \in \mathrm{End}(\mathrm{Hau}_{\lambda_i}(f))$ mit Hilfe von
  $\dim(\ker(f - \lambda_i \, id)^j)$
  (Es gilt: $\ker(f-\lambda_i \, id)^j = \ker\left((f - \lambda_i \, id)|_{\mathrm{Hau}_{\lambda_i}(f)}\right)^j$)

<u>Korollar 7.4.5:</u> Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ die EW von f und $d_i := \dim \mathrm{Hau}_{\lambda_i}(f)$,
so ist $\quad \chi_f(X) = (\lambda_1 - X)^{d_1} \cdot (\lambda_2 - X)^{d_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda_s - X)^{d_s}$.

<u>Bew:</u> Wähle $g: K^n \to V$ wie in Satz 7.4.1, d.h.
$g^{-1} \circ f \circ g =: A \in K^{n \times n}$ ist in JNF.
Dann ist $\quad \chi_f = \chi_A \quad$ (nach Def. 5.2.6)

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} \underbrace{\boxed{\begin{matrix} \lambda_1 - X & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_1 - X \end{matrix}}}_{r_1 \times r_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} \overset{5.1.7}{=} (\lambda_1 - X)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda_\ell - X)^{r_\ell}$$

Für jeden Eigenwert λ von f gilt: Die Summe aller der r_i, für die $\lambda_i = \lambda$ gilt, ist gleich $\dim \mathrm{Hau}_\lambda(f)$. $\square$

Korollar 7.4.6 (Jordanzerlegung): f lässt sich als Summe $f = f_{diag} + f_{nilp}$ schreiben für $f_{diag}, f_{nilp} \in \mathrm{End}(V)$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) f_{diag} ist diagonalisierbar

(b) f_{nilp} ist nilpotent

(c) f_{diag} und f_{nilp} kommutieren, d.h. $f_{diag} \circ f_{nilp} = f_{nilp} \circ f_{diag}$

Bsp Anwendung:

- Gegeben f. Was ist f^{100}?
- Schreibe $f = f_{diag} + f_{nilp}$ wie in 7.4.6
- Sei N der Nilpot-Grad von f_{nilp}.

  Falls $N = 3$ (Bsp),

$$f^{100} = (f_{diag} + f_{nilp})^{100} = f_{diag}^{100} + 100 \cdot f_{diag}^{99} \circ f_{nilp} + \binom{100}{2} \cdot f_{diag}^{98} \circ f_{nilp}^{2} + \underbrace{\binom{100}{3} \cdot f_{diag}^{97} \circ f_{nilp}^{3}}_{=0} + \underbrace{\dots}_{=0}$$

- $f_{diag}^{100}, f_{diag}^{99}, f_{diag}^{98}$ lässt sich mit Abschnitt 5.2 leicht berechnen.

Bew: Sei $g: K^n \to V$ so, dass $A = g^{-1} \circ f \circ g$ in JNF ist

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \text{\Large 0} & \\ & & \lambda_1 & 0 & & & \\ & & & \ddots & 0 & & \\ & & & & \lambda_\ell & 1 & \\ & \text{\Large 0} & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & \lambda_\ell \end{pmatrix}$$

$A = A_{diag} + A_{nilp}$, für

$$A_{diag} := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_1 & & & \text{\Large 0} & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda_\ell & & \\ & \text{\Large 0} & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_\ell \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_{nilp} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ & \ddots & 0 & & & \text{\Large 0} & \\ & & \ddots & 0 & & & \\ & & & \ddots & 1 & & \\ & \text{\Large 0} & & & \ddots & 1 & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Setze $f_{diag} := g \circ A_{diag} \circ g^{-1}$ und $f_{nilp} = g \circ A_{nilp} \circ g^{-1}$

- A_{diag} ist diag-bar $\Rightarrow$ f_{diag} ist diag-bar
- A_{nilp} ist nilpotent $\Rightarrow$ f_{nilp} ist nilpotent
- $A_{diag} \cdot A_{nilp} \overset{?}{=} A_{nilp} \cdot A_{diag} \Rightarrow f_{diag} \circ f_{nilp} \overset{?}{=} f_{nilp} \circ f_{diag}$

$$f_{diag} \circ f_{nilp} = g \circ A_{diag} \circ \cancel{g^{-1} \circ g} \circ A_{nilp} \circ g^{-1} = g \circ A_{diag} \circ A_{nilp} \circ g^{-1} = g \circ A_{nilp} \circ A_{diag} \circ g^{-1} = f_{nilp} \circ f_{diag}$$

- Es reicht, das für jeden Jordan-Block zu prüfen, also:

$$\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \lambda \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

$\square$