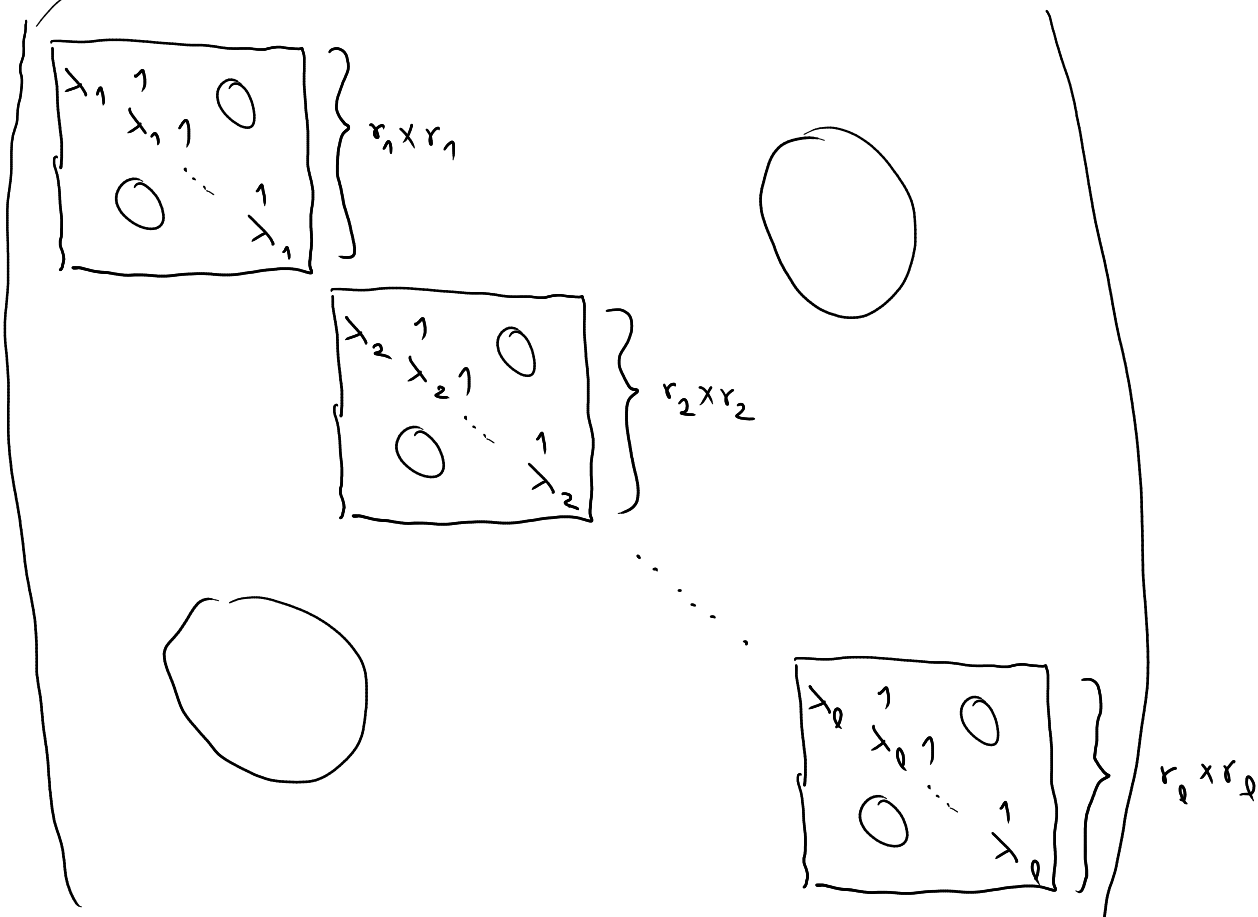


7.4 Die Jordansche Normalform

Sei K alg. abg., V ein endl.-dim K -VR und $f \in \text{End}(V)$

Satz 7.4.1 (Jordansche Normalform): Es existiert ein Isomorphismus $g: K^n \rightarrow V$ ($n = \dim V$), so dass die Matrix von $g^{-1} \circ f \circ g$ die folgende Form hat:



wobei $\lambda_i \in K$ und $r_i \geq 1$ sind.

Hierbei sind die Paare $(\lambda_1, r_1), \dots, (\lambda_l, r_l)$ bis auf Reihenfolge eindeutig durch f festgelegt.

(Ist $r_i = 1$, so ist der zugehörige Block $\boxed{\lambda_i}$) // JNF

Def 7.4.2: Die obige Matrix nennt man die Jordansche Normalform von f . Eine Matrix dieser Form nennt man auch „in Jordanscher Normalform“. Die $r_i \times r_i$ -Blöcke nennt man Jordan-Blöcke.

Bem 7.4.3: Für Matrizen $A \in K^{n \times n}$ besagt Satz 7.4.1: Es existiert ein $S \in GL_n(K)$, so dass $S^{-1}AS$ in Jordanscher Normalform ist. Anders ausgedrückt: Jede Matrix ist zu einer Matrix in JNF

ähnlich.

Bem: Satz 7.4.1 kann auch ausgedrückt werden als:

Ex. Basis $v_{1,1}, \dots, v_{1,r_1}, v_{2,1}, \dots, v_{2,r_2}, \dots, v_{\ell,1}, \dots, v_{\ell,r_\ell}$ von V

$$\text{s.d. } f(v_{i,1}) = \lambda_i \cdot v_{i,1} \quad \text{für } 1 \leq i \leq \ell$$

$$f(v_{i,j}) = \lambda_i \cdot v_{i,j} + v_{i,j-1} \quad \text{für } 1 \leq i \leq \ell, j \geq 2$$

Bew(7.4.1): Existenzaussage:

- Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ die Eigenwerte von f . Nach 7.3.7 ist

$$V = \underbrace{\text{Hau}_{\lambda_1}(f)}_{=: H_1} \oplus \dots \oplus \underbrace{\text{Hau}_{\lambda_s}(f)}_{=: H_s}$$

- Für jedes i :

- $h_i := (f - \lambda_i \text{id})|_{H_i} \in \text{End}(H_i)$

- h_i ist nilpotent. Nach 7.2.4 ex. Basis

$$(v_{i,j})_j \text{ von } H_i \text{ s.d.}$$

$$h_i(v_{i,j}) = 0 \text{ oder } = v_{i,j-1} \text{ für alle } j$$

- $\Rightarrow f(v_{i,j}) = h_i(v_{i,j}) + \lambda_i v_{i,j} = \begin{cases} \lambda_i v_{i,j} & \text{oder} \\ \lambda_i v_{i,j} + v_{i,j-1} \end{cases}$

- Alle $v_{i,j}$ zusammen bilden also eine Basis der gesuchten Form (anders nummeriert).

- Eindeutigkeit:

- Annahme: Habe eine Basis $(v_{i,j})_{i \in S, j \in \mathbb{N}}$ von V und $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in K$

so dass gilt:

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} \lambda_i v_{i,j} & \text{oder} \\ \lambda_i v_{i,j} + v_{i,j-1} \end{cases}$$

paarweise verschieden

- Setze $h_i := f - \lambda_i \text{id}$. Dann ist $h_i^N(v_{i,j}) = 0$ für N hinreichend groß. Also ist $v_{i,j} \in \text{Hau}_{\lambda_i}(f)$

Da $V = \text{Hau}_{\lambda_1}(f) \oplus \dots \oplus \text{Hau}_{\lambda_s}(f)$ folgt:

$(v_{i,j})_j$ ist eine Basis von $\text{Hau}_{\lambda_i}(f)$. Insbes. $d_i = \dim \text{Hau}_{\lambda_i}(f)$

- Da $h_i(v_{i1}) = 0$ oder $= v_{i1}$ für alle j hat $h_i|_{\text{Hau}_{\lambda_i}(f)}$ bzgl. der Basis $(v_{ij})_j$ die Form



also wie in Satz 7.2.4,

also sind die Block-Größen eindeutig durch

$h_i|_{\text{Hau}_{\lambda_i}(f)}$ festgelegt.

Diese Blöcke von $h_i|_{\text{Hau}_{\lambda_i}(f)}$ entsprechen genau den Blöcken von f mit λ_i auf der Diagonalen. Also sind auch diese Blöcke festgelegt. \square

Bem 7.4.4: Die JNF von f lässt sich wie folgt bestimmen:

- Bestimme die EW $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ von f (NST. von χ_f)
- Bestimme die Blockgrößen vom nilpotenten Endomorphismus $(f - \lambda_i \text{id})|_{\text{Hau}_{\lambda_i}(f)} \in \text{End}(\text{Hau}_{\lambda_i}(f))$ mit Hilfe von $\dim(\ker(f - \lambda_i \text{id})^i)$ (Es gilt: $\ker(f - \lambda_i \text{id})^i = \ker((f - \lambda_i \text{id})|_{\text{Hau}_{\lambda_i}(f)})^i$)

Korollar 7.4.5: Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ die EW von f und $d_i := \dim \text{Hau}_{\lambda_i}(f)$, so ist $\chi_f(x) = (\lambda_1 - x)^{d_1} \cdot (\lambda_2 - x)^{d_2} \cdot \dots \cdot (\lambda_s - x)^{d_s}$.

Bew: Wähle $g: K^n \rightarrow V$ wie in Satz 7.4.1, d.h.

$g^{-1} \circ f \circ g =: A \in K^{n \times n}$ ist in JNF.

Dann ist $\chi_f = \chi_A$ (nach Def. 5.2.6)

$$\chi_A = \det \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 - x & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \\ \hline 0 & & & \lambda_2 - x \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \end{array} \right) \stackrel{5.1.7}{=} (\lambda_1 - x)^{r_1} \cdot \dots \cdot (\lambda_s - x)^{r_s}$$

Für jeden Eigenwert λ von f gilt: Die Summe aller der r_i , für die $\lambda_i = \lambda$ gilt, ist gleich $\dim \text{Hau}_{\lambda}(f)$. \square

Korollar 7.4.6 (Jordan Zerlegung): f lässt sich als Summe $f = f_{\text{diag}} + f_{\text{nilp}}$ schreiben für $f_{\text{diag}}, f_{\text{nilp}} \in \text{End}(V)$ mit folgenden Eigenschaften:

- (a) f_{diag} ist diagonalisierbar
- (b) f_{nilp} ist nilpotent
- (c) f_{diag} und f_{nilp} kommutieren, d.h. $f_{\text{diag}} \circ f_{\text{nilp}} = f_{\text{nilp}} \circ f_{\text{diag}}$

Bsp Anwendung:

- Gegeben f . Was ist f^{100} ?
- Schreibe $f = f_{\text{diag}} + f_{\text{nilp}}$ wie in 7.4.6
- Sei N der Nilpot-Grad von f_{nilp}

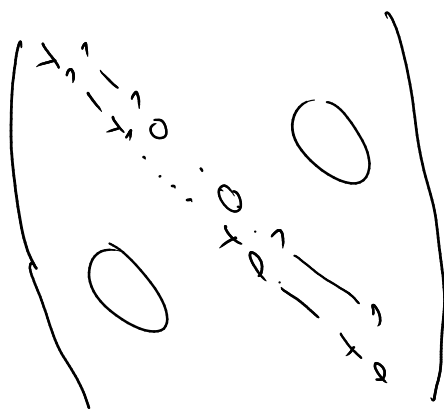
Falls $N=3$ (Bsp),

$$f^{100} = (f_{\text{diag}} + f_{\text{nilp}})^{100} = f_{\text{diag}}^{100} + 100 \cdot f_{\text{diag}}^{99} \circ f_{\text{nilp}} + \binom{100}{2} \cdot f_{\text{diag}}^{98} \circ f_{\text{nilp}}^2 + \binom{100}{3} \cdot f_{\text{diag}}^{97} \circ f_{\text{nilp}}^3 + \dots$$

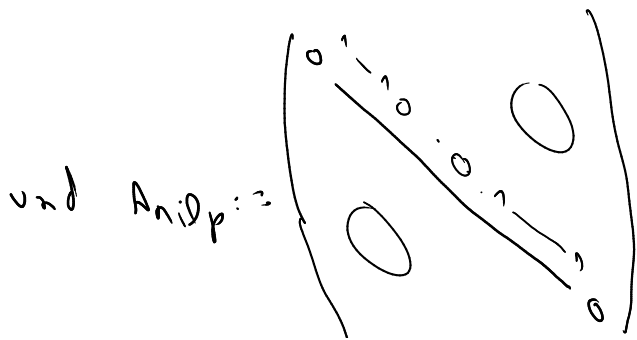
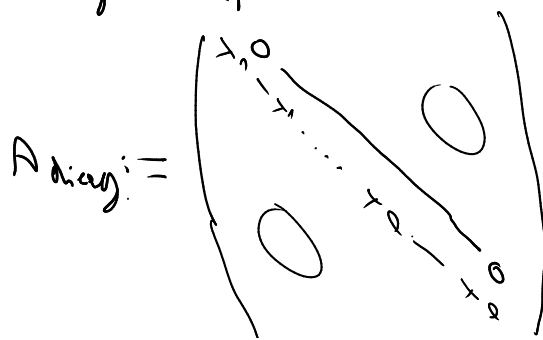
$\underbrace{\hspace{10em}}_{=0} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=0}$

- $f_{\text{diag}}^{100}, f_{\text{diag}}^{99}, f_{\text{diag}}^{98}$ lässt sich mit Abschnitt 5.2 leicht berechnen.

Bew: Sei $\varphi: K^n \rightarrow V$ so, dass $A = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ in JNF ist



$A = A_{\text{diag}} + A_{\text{nilp}}$, für



Sei $f_{\text{diag}} := g \circ A_{\text{diag}} \circ g^{-1}$ und $f_{\text{nilp}} = g \circ A_{\text{nilp}} \circ g^{-1}$

- A_{diag} ist diag-bar $\Rightarrow f_{\text{diag}}$ ist diag-bar
- A_{nilp} ist nilpotent $\Rightarrow f_{\text{nilp}}$ ist nilpotent
- $A_{\text{diag}} \cdot A_{\text{nilp}} = A_{\text{nilp}} \cdot A_{\text{diag}} \Rightarrow f_{\text{diag}} \circ f_{\text{nilp}} = f_{\text{nilp}} \circ f_{\text{diag}}$

• Es reicht, das für jeden Jordan-Block zu prüfen, also:

$$\begin{array}{l}
 g \circ A_{\text{diag}} \circ g^{-1} \circ g \circ A_{\text{nilp}} \circ g^{-1} \\
 \parallel \\
 g \circ A_{\text{diag}} \circ A_{\text{nilp}} \circ g^{-1} = g \circ A_{\text{nilp}} \circ A_{\text{diag}} \circ g^{-1}
 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \lambda & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \lambda & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \lambda & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$